4 Standardizzazione

Chiariti i termini, si pone ora il problema di calcolare valori di probabilità relativi ad una variabile aleatoria come quella normale, che non ammette primitive della funzione densità esprimibili elementarmente. L'approccio da seguire viene illustrato mediante due video.

4.1 Standardizzazione della variabile aleatoria normale -video-

Cosa. Nel video illustriamo il processo di standardizzazione della variabile aleatoria normale. L'importanza del tema è stata sottolineata anche dall'UMI-CIIM, che lo inserisce nel syllabus di matematica per i Licei scientifici [3, paragrafo "Dati e previsioni"]:

> operazione di standardizzazione: sua importanza nel confronto e studio di distribuzioni statistiche e di probabilità e per l'utilizzo in modo corretto delle tavole della distribuzione normale standardizzata.

In effetti, al di là del suo impiego per calcolare valori di probabilità, standardizzare è utile per confrontare valori relativi ad uno stesso carattere, ma rilevati con *criteri diversi.* Ad esempio, i voti ottenuti in due prove, una valutata in centesimi e l'altra in trentesimi.

Come. L'intento principale del video è illustrare un approccio che possa essere ricostruito dallo studente anche a lungo termine. Non forniamo dunque una sterile ricetta da applicare per risolvere gli esercizi: allo studente viene costantemente indicato l'obiettivo parziale che si vuole raggiungere e vengono esplicitate le ragioni sottese ai vari passi.

Uso. Il video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale" si presta ad essere esaminato individualmente, così da sfruttare la possibilità di interromperne la visione per rielaborare alcuni passaggi oppure per riprendere alcune sezioni non comprese. In sostanza dunque, il materiale permette allo studente di procedere secondo il proprio ritmo di apprendimento. Comunque l'obiettivo pratico, che è bene esplicitare ai ragazzi, resta quello di determinare delle probabilità; pertanto è importante curare anche la comprensione globale della questione. Allo scopo può servire richiedere di produrre uno schema scritto e personale, dell'intero procedimento.

4.2 Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale standard -video-

Cosa. Il video completa l'esame del procedimento che conduce a valutare probabilità relative alla distribuzione normale. Precisamente, illustra il calcolo di probabilità relative alla variabile aleatoria normale standard mediante opportune tavole. Naturalmente, per effettuarlo si può ricorrere anche ad altri strumenti, come il foglio di calcolo oppure il software Geogebra. Ma di questo ci occuperemo più avanti.

Come. La scelta didattica che caratterizza questo segmento di percorso è mostrare esplicitamente allo studente un possibile schema di ragionamento per risolvere il problema. Precisamente l'idea è esaminare ciò di cui si dispone (le tavole) per poterlo utilizzare in vista di un obiettivo specifico (calcolo di probabilità relative alla variabile aleatoria standard). Si comprende, perciò, che tale riflessione assume una valenza più generale rispetto al contesto specifico in cui è ambientata.

Tornando al nostro procedimento di calcolo, abbiamo deciso di illustrarlo in dettaglio, passo per passo; è un esempio di attenzione metacognitiva al processo (tutto il procedimento descritto minuziosamente) più che al prodotto. Ciò è dovuto essenzialmente a ragioni di chiarezza espositiva, ma comporta dei rischi didattici sui quali non sempre si riflette. Ossia, come ammonisce R. Zan [24],

> [...] il "bravo" insegnante cerca di risparmiare all'allievo fatica, insuccesso, problemi, in nome naturalmente del "bene" dell'allievo stesso. In altre parole tende ad assumere completamente su di sé la responsabilità del processo di insegnamento/apprendimento.
> In realtà questa è una contraddizione: perché una delle principali responsabilità dell'insegnante è proprio quella di far sì che l'allievo si assuma la responsabilità dell'apprendimento.

Perciò, nella pratica didattica è opportuno proporre anche attività meno strutturate, in cui lo studente sperimenta le difficoltà in prima persona, ma può così gustare la soddisfazione di aver raggiunto l'obiettivo contando sulle proprie forze, accrescendo il senso di autoefficacia.

Uso. La modalità d'uso prevista per il video "Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale standard" è analoga a quella del precedente.

4.3 Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale

Cosa. Si tratta di una sintesi motivata del procedimento esaminato nei due video. In realtà, tale rielaborazione dovrebbe venir prodotta dallo studente stesso, magari opportunamente guidato dal docente, perché consente di far proprio il contenuto dei video e di poterlo così spendere in situazioni specifiche.

Come. Le scelte didattiche qui sottese sono quelle che stanno alla base dei due video.
Nell'esaminare tali materiali, gli studenti passano da un registro all'altro, a più livelli: dal punto di vista grafico a quello analitico, dal materiale audio-visivo alla formalizzazione scritta. Tale metodologia didattica, che viene proposta a più riprese nel percorso, permette di attivare le diverse forme di pensiero che sono caratteristiche di ogni studente e fornisce l'occasione per esercitare anche quelle che non sono a lui più congeniali, arricchendo così il suo patrimonio cognitivo. Il fondamento di tale approccio è negli studi dello psicologo Howard Gardner[8]:

> [...] risulta ampiamente documentato che mentre l'approccio all'apprendimento di alcuni è primariamente linguistico, quello di altri privilegia un percorso spaziale o quantitativo. [...] riuscire a presentare le discipline in una molteplicità di modi diversi e a valutare l'apprendimento con una varietà di mezzi altrettanto diversi vorrebbe dire servire meglio tutta la vasta e variegata gamma di studenti che popolano le scuole e, forse, contribuire alla crescita della società intera.

Uso. Questa sintesi è uno strumento aggiuntivo che forniamo agli studenti per compren-

[8] H. Gardner, *Educare al comprendere*, 2002, Feltrinelli.

dere i video, ma *non* li sostituisce e non va solamente letta. Costituisce uno schema di riferimento per i ragazzi che non sono abituati a produrne autonomamente: lo scopo ultimo è che sulla base di questo, essi riescano a realizzare sintesi analoghe, a supporto dello studio, anche in altri contesti.

4.4 Media e varianza della variabile aleatoria standardizzata -attività-

Aspetti didattici

Cosa. Nel video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale" sono stati ricavati alcuni risultati unicamente per via intuitiva, pertanto ora indirizziamo gli studenti alla loro dimostrazione formale. Comunque, come già osservato in altri contesti, riteniamo che la comprensione intuitiva del procedimento che conduce alla variabile aleatoria standardizzata $\frac{X-\mu}{\sigma}$ sia più importante della sua verifica rigorosa.

Come. Spesso i libri di testo, anche della scuola secondaria di secondo grado, usano i simboli E e V per indicare rispettivamente media e varianza di una variabile aleatoria. Noi li introduciamo per la prima volta con questa attività e nemmeno nella richiesta iniziale, perché gli studenti hanno già molti nomi e simboli da ricordare e tale notazione diventa fondamentale solo nella dimostrazione. Infatti essa prevede di esprimere media e varianza di più variabili aleatorie e i simboli abbreviano la scrittura e facilitano davvero la comunicazione rispetto al linguaggio naturale. D'altra parte, questo è proprio uno dei motivi per cui più in generale si utilizza il formalismo matematico. L'attenzione didattica consiste nel fatto che in questa attività la sua introduzione è dettata da un'esigenza, che, per come è strutturata, è dello studente, non del docente.

Uso. L'attività si può effettuare come lavoro individuale, dato che i materiali sono organizzati nella forma suggerimento e dimostrazione.

Approfondimento teorico - $\frac{X-\mu}{\sigma}$ è una v.a. normale standard-

Con l'attività del paragrafo **??**, gli studenti dimostrano che la variabile aleatoria $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ha media 0 e varianza 1. Prima di ciò, però, occorrerebbe verificare che tale variabile si distribuisca ancora secondo una curva normale. La proposizione seguente completa la dimostrazione.

Proposizione. *Sia X una variabile aleatoria normale e $a, b \in \mathbb{R}$ dove $a > 0$. Allora la variabile aleatoria $aX + b$ ha ancora distribuzione normale.*

Dimostrazione. Se X è una v.a. normale di parametri μ e σ^2, vale

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x$$

Definiamo la v.a. $Y = aX + b$; allora

$$P(Y \leq t) = P(aX + b \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x$$

Effettuando la sostituzione $Y = aX + b$, risulta

$$P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2} \frac{\mathrm{d}y}{a} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}}\, \mathrm{d}y$$

e questo significa che la variabile aleatoria Y ha distribuzione normale di parametri $b + a\mu$ e $\sigma^2 a^2$. $\square$

Torniamo allora alla nostra situazione: sia X una variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2. Per la proposizione precedente, la variabile $\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$ ha distribuzione normale di parametri $\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$ e $\frac{\sigma^2}{(\sigma)^2} = 1$, ossia coincide con una distribuzione normale standard. L'operazione $X \longrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}$ si chiama **standardizzazione** di X e fornisce, per ogni variabile aleatoria normale X, una variabile normale standard.

4.5 Probabilità con la variabile aleatoria standardizzata -attività-

Cosa. Vogliamo a questo punto dimostrare il risultato che sancisce la validità operativa del procedimento di standardizzazione: la probabilità relativa alla variabile aleatoria normale X è uguale alla probabilità relativa alla v.a. standardizzata $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, pur di valutarla nell'intervallo corrispondente.
Tale uguaglianza è stata prospettata solo a livello intuitivo nel video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale", ripercorrendo graficamente la costruzione fatta. Si tratta ora di provarlo formalmente usando gli integrali.

Come. Nell'attività gli studenti hanno nuovamente la possibilità di lavorare con gli integrali in vista di un obiettivo. In particolare, è un contesto interessante in cui sfruttare la formula di sostituzione, che spesso nella secondaria rimane confinata nell'ambito degli esercizi di calcolo.

Uso. La modalità d'uso è analoga a quella dell'attività precedente.