Un percorso: il punto di vista del docente

1 Motivazioni alla normale

1.1 I sondaggi

Cosa. I sondaggi sono la situazione motivante con cui abbiamo scelto di introdurre il percorso sulla distribuzione normale. Iniziare un percorso didattico con uno stimolo serve da una parte per muovere l'impegno degli studenti e dall'altra per fornire loro situazioni concrete in cui contestualizzare i nuovi oggetti matematici. La scelta è caduta sui sondaggi perché comprenderne le modalità di conduzione e la portata dei dati numerici forniti permette di formarsi un'idea più precisa di ciò che accade in vari contesti e dunque consente di prendere decisioni più consapevoli.

Come. Proponiamo dunque un contesto reale, in accordo con le indicazioni fornite nelle Linee guida della provincia di Trento per i Licei [2]:

> [...] l'insegnamento della matematica, a partire dai saperi disciplinari e da un costante riferimento al contesto quotidiano, allo studio e al lavoro, [...] sviluppa forme specifiche di pensiero e assicura gli strumenti necessari ad affrontare i problemi della vita quotidiana e la descrizione scientifica del mondo.

Per contro, si ha l'impressione che molte questioni che si pongono a scuola e che compaiono sui libri di testo siano artificiali, o almeno siano percepite come tali dagli studenti: hanno quasi sempre soluzione, questa è unica e il testo contiene tutti e soli i dati strettamente indispensabili per determinarla. Ciò comporta il rischio di portare gradualmente gli studenti a pensare che ciò che si affronta a scuola sia altro rispetto alla realtà. Pertanto vogliamo iniziare il percorso da un contesto ricco, quello dei sondaggi, secondo l'accezione di Freudenthal e con le attenzioni che egli suggerisce [14, pag. 104-105]:

> "Creare, rinforzare, e mantenere i legami con la realtà". Questo è ciò che i contesti ricchi debbono fare [...]. Ma in ogni caso occorre sempre ricordare che il contesto non è semplicemente il vestito con il quale si riveste la matematica [...] il contesto è il messaggio, e la matematica è lo strumento per decodificarlo.

E per attuare tale proposito mostriamo il sito ministeriale `www.sondaggipoliticoelettorali.it`. In particolare facciamo osservare ai ragazzi che l'importanza dei sondaggi è stabilita *per legge*, non è solo una questione matematica, dato che essi devono essere riportati su un sito gestito dallo Stato. In quest'ottica è importante illustrare il significato dei termini e dei dati presenti.
D'altra parte, però, è bene tener presente che proprio la ricchezza del contesto potrebbe diventare un problema, come evidenzia Rosetta Zan [23, pag. 54]:

> il contesto scelto [...] spinge verso una particolare interpretazione dell'implicazione tipica del linguaggio quotidiano che facilita la risposta corretta, ma modifica strutturalmente il compito di partenza [...] che era invece "neutrale". L'approccio [...] è tipico della pragmatica, disciplina che mette al centro dell'attenzione il contesto e gli scopi.

In altre parole, il contesto potrebbe condizionare fortemente la risposta, al punto da costituire il criterio principale sul quale essa si basa, facendo passare in secondo piano l'aspetto logico[1].

Uso. Il materiale costituisce un riferimento per la lezione, che può essere condotta in modalità partecipata. Ulteriori approfondimenti possono essere condotti sfruttando il link al sito ministeriale, che raccoglie i sondaggi.
Ancor più motivante sarebbe effettuare un sondaggio all'interno della scuola, per esempio prima delle elezioni dei rappresentanti d'istituto per valutare quanti sono favorevoli o meno ad un certo gruppo di candidati (o solo ad un candidato).

La questione

Cosa. Una volta presentato il (ricco) contesto, conviene focalizzare l'attenzione su un quesito specifico: determinare la probabilità che la frequenza relativa dell'evento "la persona vota A" rilevata sul campione sia una "buona" stima della probabilità che l'individuo della popolazione voti A. Esso costituirà il nostro problema guida per l'intero percorso. Tale situazione di apprendimento viene indicata da B. D'Amore, in [12, pag.285], come *situazione problema.*
Si tratta di una questione "semplice" per l'intero nostro percorso sulla distribuzione normale e il TLC. Invece il problema inverso (determinare la dimensione del campione per avere una "buona" stima della probabilità sulla popolazione), pur molto interessante, è assai complesso per una classe della scuola secondaria.

Uso. Prima di discutere in classe un possibile approccio risolutivo, conviene lasciare spazio alle proposte di soluzione degli studenti.

1.2 Un modello binomiale

Cosa. È una prima schematizzazione della situazione in esame, che permette agli studenti di iniziare ad affrontare il problema mediante gli strumenti matematici in loro possesso e poi constatarne i limiti per affrontare efficacemente la situazione in esame.

[1] Significativo a tal proposito è l'esempio che riporta R. Zan [23, pag. 47], basato su uno studio classico: *Linda ha 31 anni, non è sposata, è schietta e molto vivace. È laureata in filosofia. Quando era studentessa, si interessava molto ai temi della discriminazione e della giustizia sociale, e prendeva parte a manifestazioni antinucleari.*
Quale di queste due affermazioni su Linda é più probabile?
A. Linda è un'impiegata di banca.
B. Linda è un'impiegata di banca attiva nel movimento femminista.
In un campione piuttosto numeroso di studenti che avevano seguito corsi di statistica, più dell'80% dei soggetti valuta l'opzione B più probabile dell'opzione A. Da ciò emerge che nel rispondere non sono stati seguiti i criteri formali (di cui effettivamente disponevano), ma sono stati predominanti altri criteri relativi al contesto. Infatti, formulando la domanda in termini insiemistici, il secondo evento è strettamente contenuto nel primo, perciò la sua probabilità di realizzarsi è evidentemente minore.

In questo modo si possono radicare con continuità i saperi nuovi sui pregressi: se non si forniscono agli studenti le occasioni per prendere consapevolezza dei limiti delle procedure di cui dispongono, essi difficilmente potranno cogliere la necessità e il ruolo degli oggetti matematici che si introducono. Pertanto i nuovi saperi non saranno disponibili per essere utilizzati in altri contesti e a lungo termine. Di questo avviso è A. Sfard [21, pag.294]:

> [...] sembra che la via più sicura per arrivare a nuove esplorazioni sia quella di presentarle come (possibili) miglioramenti di atti familiari.

Come. Questa attività sviluppa la capacità di costruire e valutare modelli matematici, in coerenza con le Indicazioni nazionali [1] e le Linee guida della provincia di Trento [2].

> Lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

In quest'ottica riserviamo una speciale attenzione al modello binomiale che poniamo alla base del percorso sulla probabilità nella classe quinta. In particolare, esaminiamo le ipotesi da assumere affinché abbia senso modellizzare la situazione con tale distribuzione. Inoltre discutiamo un modo di ricavare, per passi, l'espressione analitica della distribuzione di probabilità discreta binomiale. Vogliamo così mostrare allo studente come ricostruirla volta per volta, senza doverla ritenere a memoria. Nel fare ciò seguiamo un approccio indicato da Freudenthal [14, pag. 74-75] come "reinvenzione guidata": ossia lo studente prova a costruire la formula come se la inventasse lui stesso, ma nel farlo può contare sulle indicazioni e la guida accorta e discreta del docente.

> Il discente deve essere libero di trovare il proprio livello, e di esplorare i cammini che vi conducono, con il minimo di guida richiesta per ogni caso particolare. [...] Gli educatori hanno la responsabilità di aiutarli, non con prescrizioni, ma permettendo loro di reinventare la matematica che dovrebbero imparare.

Tra l'altro, questa modalità contribuisce a rendere i saperi disponibili a lungo termine che, ricordiamo, è uno dei criteri sottesi al nostro percorso.

Uso. Il materiale è pensato come dispensa a supporto di una lezione partecipata, ma si può eventualmente proporre come traccia per un lavoro guidato che lo studente prova a svolgere autonomamente. Questa forma offre l'indubbio vantaggio di far scontrare i ragazzi con la complessità del calcolo, in modo più diretto.

1.3 Un nuovo modello: verso il TLC

Cosa. Attraverso un approccio grafico, viene discussa l'idea di approssimare la distribuzione binomiale mediante un nuovo modello e si precisa tale approssimazione in una prima elementare formulazione del teorema limite centrale. Ciò permette di esprimere il problema guida in una nuova forma che prevede il ricorso alla curva "a campana" e, come si vedrà, comporta una notevole semplificazione computazionale.

Come. Passare all'approccio grafico permette di visualizzare con immediatezza la questione e dunque di mettere in evidenza il filo logico del procedimento. Come contro parte si deve però accettare di perdere in rigore e in precisione. Questo va esplicitato allo studente, in modo che non confonda l'esame di singoli casi, per quanto suggestivi, con una dimostrazione. Ciò non significa che, in un secondo momento, non si possa proporre una formalizzazione più precisa, ma ora riteniamo sia più utile investigare sul significato profondo della questione.
Del resto, l'affrontare lo stesso argomento in momenti e modi diversi è un'indicazione presente nelle Linee guida della provincia di Trento [2].

> Non si dovrà dimenticare l'importanza di ritornare a più riprese sugli argomenti trattati, in un percorso a spirale che approfondisca a più livelli e da più punti di vista i concetti portanti della disciplina.

Uso. La questione è delicata, pertanto il materiale è concepito come dispensa per una lezione partecipata.

1.4 Altre motivazioni alla normale

Cosa. L'approccio alla normale che abbiamo seguito è solo *uno* dei possibili. Storicamente il primo lavoro sull'approssimazione della distribuzione binomiale pare esser stato quello di De Moivre, il quale già nel 1733 cercava una via per uscire dai conti "impossibili" a cui conduce l'uso della binomiale. Si tratta dunque di un approccio analogo al nostro.
In seguito, altri problemi hanno condotto alla "curva a campana", tra cui quelli sui quali hanno investigato Gauss e Quételet.
Gauss nel 1809 giunse all'espressione algebrica della curva normale[2] durante la sua ricerca della legge distributiva degli errori accidentali (errori dovuti all'imperfezione dello strumento di misura, alle circostanze ambientali, all'errore del rilevatore...). A tal riguardo, Galton si meravigliò al punto da eleggerla a "suprema legge dell'Assenza di Ragione", come scrive nel noto passo in cui prospetta l'"ordine nel caos"; passo che ci sembra significativo proporre anche agli studenti.
Poi, nella seconda metà dell'Ottocento, la curva normale iniziò ad essere usata per modellizzare le distribuzioni di alcuni caratteri (come la statura, il peso ecc.) in popolazioni umane omogenee. Ciò avvenne soprattutto ad opera di Quételet.
Seguendo questo sviluppo storico (come fa ad esempio G. Cicchitelli in [32, pag.86-87]), ci sembra significativo riproporre agli studenti le tre situazioni che lo hanno segnato: approssimazione della binomiale, legge della distribuzione degli errori accidentali nella misura e delle altezze in una popolazione.

Come. L'argomento si presta ad essere affrontato mediante attività interdisciplinari, che sono promosse a più riprese nelle Linee generali delle Indicazioni Nazionali [1].

[2] In suo onore Laplace nel 1811 diede alla curva "a campana" il nome di Gaussiana.

> Al termine del percorso del liceo scientifico, lo studente [...] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico.

In quest'ottica è interessante investigare, ad esempio, il ruolo rivestito dalla curva normale nello sviluppo delle varie discipline nell'Ottocento. Ma anche esaminare, come controparte, alcuni testi quali *Il cigno nero* di N. Taleb[3], che demonizzano l'uso indiscriminato del modello normale e la fede cieca nelle sue capacità di previsione.
Una simile ammonizione è presente nel testo di Villani [22, pag. 274]:

> il teorema del limite centrale è un risultato teorico che afferisce a un modello matematico e non alla realtà [...]. Henri Poincarè osservava criticamente che "tutti" giuravano sulla distribuzione normale perchè gli sperimentatori assumevano che essa fosse stata dimostrata matematicamente mentre i matematici la ritenevano acquisita sperimentalmente.

Uso. Il materiale proposto è costituito da esempi e spunti non esaustivi che possono essere opportunamente integrati, magari con letture mirate. Ancora più efficace sarebbe far raccogliere i dati direttamente agli studenti, ad esempio le altezze dei ragazzi della scuola (M. Barra in [7] e [11]) oppure le lunghezze degli aghi di uno stesso ramo di pino o ancora le lunghezze dei chiodi di una stessa confezione [25, pag.39-40]. In realtà queste ultime attività si collocano efficacemente nel primo biennio in un'ottica di didattica a spirale. In ogni caso, come osservato più in generale nell'introduzione del capitolo, le situazioni proposte sono ricche e diverse tra loro e forse in numero maggiore a quante si riesce a proporre in classe. Naturalmente non è indispensabile discutere tutte.

1.5 Facciamo il punto

Cosa. Al termine di questo segmento, discutiamo le conclusioni: gli studenti dovrebbero essere ormai convinti dell'importanza di studiare la curva normale, che hanno visto intervenire in contesti così diversi.
Ora ne presentiamo l'espressione analitica, che descriviamo come famiglia di funzioni, ovvero un insieme di funzioni ognuna delle quali si ottiene fissando i valori dei parametri reali μ e σ.

Come. È solo a questo punto del percorso che introduciamo l'espressione analitica della funzione che ha come grafico la curva "a campana". D'altra parte, non era fin qui necessaria. É questo un criterio didattico a cui ci ispiriamo anche in altre parti del percorso: introdurre aspetti formali con gradualità, solo quando servono, per dar così modo agli studenti di apprezzarne pienamente la portata e il ruolo.

Uso. Tale materiale supporta la lezione e in un certo senso possiamo indicarlo come dispensa. Il significato dell'uso del riquadro verde verrà spiegato nel paragrafo 3.2.

[3] Sarebbe interessante proporre agli studenti la lettura dei capitoli 15 e 17 di [37], tenendo conto che

2 Una famiglia di funzioni: aspetti analitici

Cosa. Appurata la loro significatività, esaminiamo ora la famiglia di funzioni il cui grafico è la curva "a campana" e decidiamo di farlo da due punti di vista: investigando prima sulle loro caratteristiche analitiche e poi sulla loro interpretazione probabilistica. Naturalmente gli aspetti semantici sono strettamente legati a quelli analitici, ma riteniamo sia più efficace esaminarli solo in un secondo momento, per dar modo anche agli studenti più fragili di dedurli consapevolmente.

Come. Le attività del paragrafo, ad eccezione della ricerca dei flessi, possono essere proposti già nella classe quarta ed eventualmente richiamate in quinta mediante un lavoro improntato ad una maggior autonomia dello studente. Non si tratta solamente di organizzare i tempi in modo più proficuo, ma di permettere agli studenti della classe quinta di concentrare l'attenzione sugli aspetti interpretativi, svincolandosi dalle questioni più strettamente analitiche.

2.1 Prime esplorazioni -attività-

Cosa. L'attività richiede agli studenti di disegnare alcuni grafici della famiglia di funzioni in esame. Si tratta di un opportuno passo intermedio per acquisire confidenza con tali oggetti matematici prima di passare a investigare sul significato geometrico dei parametri. Il lavoro è arricchito dalla possibilità di utilizzare un file Geogebra che permette di visualizzare i grafici delle funzioni considerate.

Come. Il software, però, dovrebbe essere utilizzato solo in un secondo momento, come strumento di controllo. Infatti riteniamo che, in questa fase, il lavoro su carta sia insostituibile per maturare piena consapevolezza sull'andamento del grafico, a differenza del software, che compie varie operazioni in automatico. Anzi, proprio l'abilità prima sviluppata su carta permette poi di apprezzare i grafici che si ottengono con Geogebra e di interpretarli in modo critico.
E, a proposito di grafici, suggeriamo caldamente che la costruzione non venga condotta seguendo pedissequamente lo schema per lo studio di funzione che propone ogni libro di testo: non vogliamo diventi la "ricetta" da seguire indiscriminatamente in ogni situazione, ma propendiamo per ricorrere alle trasformazioni di grafici a partire dal grafico della funzione $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. In più, è importante che lo studente sappia leggere le trasformazioni da applicare *direttamente* dall'espressione analitica della funzione. È per questo che nella risoluzione abbiamo scritto esplicitamente f in funzione di g, solo in un secondo momento. Dunque in sintesi, ancora una volta: prima l'idea e poi la formalizzazione.
Infine, osserviamo che il grafico qualitativo della funzione g si può dedurre in modo davvero istruttivo da quello di $e^{-|x|}$.

Uso. Il materiale è proposto nella forma di attività guidata: alla richiesta fanno seguito i suggerimenti, le indicazioni per l'uso del file Geogebra GraficiNormale.ggb e infine la risoluzione. In questo modo lo studente può lavorare autonomamente, anche a casa.

2.2 Caratteristiche analitiche delle funzioni -attività-

Cosa. Mediante questa attività vogliamo scoprire (e giustificare) alcune proprietà della famiglia di funzioni f. Tra le possibili, abbiamo scelto di analizzare quelle di cui lo studente dovrebbe disporre in modo immediato lungo tutto il percorso.

Come. La ricerca del massimo si può condurre senza ricorrere alle derivate (che restano comunque un utile strumento di controllo). È bene indirizzare gli studenti verso tale approccio per scongiurare il rischio che identifichino lo strumento con il concetto. Ossia identifichino la ricerca dei massimi con la derivata prima e, dunque, anche la loro esistenza con l'esistenza della derivata.
In sostanza vorremmo che gli studenti, opportunamente guidati, riuscissero a leggere il massimo e la simmetria *direttamente* (o quasi) dall'espressione analitica della funzione.
Altrettanto significativo è però il passo successivo che si deve compiere: giustificare le congetture prima formulate. Certo tale operazione è delicata quando svincolata, come nella situazione in esame, dal puro calcolo; ma, d'altra parte, è una competenza importante da sviluppare, come attestano le Linee guida della provincia di Trento [2].

> Nel delicato passaggio da una metodologia più intuitiva alla formalizzazione astratta propria del linguaggio matematico, si ridurrà gradualmente l'appello all'intuizione, cercando di far maturare il gusto per il raggiungimento della coerenza formale [...].

Naturalmente, il livello di formalizzazione che adottiamo nella risoluzione è solo uno dei livelli possibili.

Uso. Questo materiale è strutturato nella forma di attività guidata secondo lo schema suggerimento e risoluzione. In particolare, può risultare utile investigare in un primo momento le questioni su esempi e poi passare al caso generale.

2.3 Significato geometrico dei parametri -attività-

Cosa. L'attività è improntata all'investigazione del significato geometrico dei parametri μ e σ della famiglia di funzioni. Si tratta della prima vera esplorazione del percorso e mediante essa gli studenti hanno modo di costruire un proprio significato per tali oggetti matematici. Questo aspetto è rilevante al punto da costituire uno dei criteri sottesi all'intero percorso.

Come. Per attuare l'esplorazione, i ragazzi hanno a disposizione un file Geogebra che viene qui usato non come semplice strumento di controllo, ma come supporto essenziale per condurre l'attività. Il software Geogebra si presta bene a questo compito, in quanto, mediante l'uso degli slider, permette di visualizzare in modo dinamico come cambiano i grafici al variare dei parametri.
Attenzione però: l'esame dei grafici dovrebbe costituire solo il punto di partenza di un processo che conduce gradualmente lo studente a visualizzare il significato geometrico di un parametro *direttamente* dall'espressione analitica della funzione. Questo è in definitiva il vero ambizioso obiettivo dell'attività ed è ancora una volta legato all'interpretazione e al passaggio da un registro rappresentativo all'altro.

Uso. Il materiale è pensato come attività guidata in cui lo studente lavora col supporto del file Geogebra ParametriNormale.ggb.

non sono di facile comprensione e andrebbero contestualizzati.

2.4 Conclusioni

Uso. Se i tempi fossero ristretti, l'attività (come del resto le altre proposte nel percorso) si presta ad essere ridotta alla sola discussione delle conclusioni, nella modalità di lezione partecipata: il riferimento è in tal caso costituito dai contenuti evidenziati nel riquadro finale.

3 Una famiglia di funzioni: interpretazione probabilistica

3.1 Funzione di densità

Aspetti didattici

Cosa. La famiglia di funzioni, fino a qui studiata dal punto di vista analitico, viene adesso interpretata in termini probabilistici. In questa sezione si inizia a farlo approfondendo il ruolo della funzione f quale densità di probabilità.

Come. Solo dopo le diverse attività esplorative che abbiamo proposto nei paragrafi precedenti, arriviamo a precisare la definizione di densità normale e variabile aleatoria normale. Riteniamo, infatti, che in questo modo lo studente possa prendere confidenza con l'oggetto studiato, senza che esso venga prima costretto dentro un'etichetta. In altre parole, vogliamo che le cose arrivino prima dei nomi. Del resto è dello stesso avviso Lang [15, pag. 254] quando afferma che

> [...] il vocabolario si può sviluppare via via che se ne sente il bisogno. Se si sprecano settimane o mesi a costruire un bagaglio di vocaboli fine a sé stesso, che non verrà usato subito, allora è di nuovo una cosa senza senso. [...] Il nome dovrebbe venire dopo l'idea, perché il nome è stato usato soltanto per evocare l'idea.

Di più, non ci preoccupiamo troppo di assegnare un nome ad ogni oggetto matematico che si incontra. Spesso, invece, i libri di testo presentano un verboso elenco di nomi, che difficilmente lo studente arriverà a gestire e ad apprezzare, almeno a lungo termine. All'opposto riteniamo abbia più senso attribuire un nome solo nel momento in cui questo assume un ruolo *davvero* significativo nell'ambito del percorso: ossia semplifica la comunicazione (dello studente, non solo del docente[4]), oppure ha rilevanza culturale. Proprio come avviene per la curva "a campana", che interviene in così tanti campi.

Uso. Questo materiale costituisce un riferimento per la lezione e pertanto si può indicare come dispensa.

Approfondimenti teorici - l'integrale su $\mathbb{R}$ della densità normale

La funzione densità normale non ha una primitiva esprimibile elementarmente, ma per altre vie è possibile calcolare il valore dell'integrale su $\mathbb{R}$.

Proposizione. *Sia X una v.a. normale di parametri reali μ e σ^2, dove $\sigma > 0$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = 1$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che tutti gli integrali al variare di μ e σ^2 hanno lo stesso valore, che denotiamo con I. Infatti attraverso la sostituzione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z = I$$

[4] Perfino la telecronaca di una partita di calcio risulterebbe di una noia mortale se il commentatore non si servisse di termini specifici, quali corner.

Sapendo che $I > 0$, possiamo equivalentemente calcolare I^2

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

L'integrale doppio che compare si determina, per esempio, passando a coordinare polari, ossia con la trasformazione $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\mathrm{d}r = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$$

Possiamo allora concludere che $I = 1$.

$\square$

3.2 Significato probabilistico dei parametri

Aspetti didattici

Cosa. Proseguiamo l'attività interpretativa, passando a sondare il significato probabilistico dei parametri. Le conclusioni a cui giungeremo rappresentano il punto d'arrivo del segmento di percorso relativo all'esame della nostra famiglia di funzioni.

Come. Il materiale è strutturato in modo che gli studenti, con la guida accorta del docente, arrivino a congetturare il contenuto della proposizione finale, cioè che μ e σ^2 sono rispettivamente la media e la varianza della variabile aleatoria normale. Infatti, la dimostrazione di tale risultato (che comunque discutiamo nel paragrafo 3.3) non è importante quanto comprendere il significato della tesi. Come sostiene De Finetti[5],

> [...] occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza [...] Per lo stesso motivo l'importanza delle formule e dei calcoli risulta in tale trattazione diminuita in confronto a quella data ai concetti e alle immagini, perché l'importanza dell'imparare vi è sempre, come dev'essere, subordinata a quella di capire.

Nella situazione in esame gli studenti fondano la loro congettura sul significato di valore atteso e varianza e sull'interpretazione geometrica dei parametri. Certo tale approccio comporta un notevole dispendio di tempo, ma d'altra parte si rivela un fruttuoso investimento per il mantenimento dei saperi a lungo termine e per lo sviluppo di competenze trasversali.

Uso. Il materiale è pensato a supporto di una lezione condotta in modalità partecipata dal docente. In particolare, i riquadri verdi vogliono evidenziare la rilevanza di quanto contengono: ciò che vorremmo lo studente ricordi e sappia poi esporre in modo analogo. Ossia le conclusioni presentate sono quelle che riteniamo *essenziali* e sono intenzionalmente curate in modo da venir esposte in una forma adeguata per lo studente del quinto anno della scuola secondaria.

[5]Bruno de Finetti, *Matematica logico intuitiva, Cremonese, 1959, p.XIII*

Approfondimenti teorici - perché usare σ^2 e non σ

Per lo studente risulta spesso più semplice riferirsi alla deviazione standard invece che alla varianza, specialmente nel considerare esempi in cui si tiene conto delle unità di misura[6]. Dal punto di vista formale, però, è più indicato considerare come parametri della variabile aleatoria normale μ e σ^2, non σ. Il motivo principale di ciò risiede nella validità del risultato seguente, che qui non dimostriamo[7].

Proposizione. *Siano X e Y due v.a. normali indipendenti, rispettivamente di media μ_X e μ_Y e varianza σ_X^2 e σ_Y^2.*
Allora $X + Y$ è ancora una v.a. normale. Inoltre, $X + Y$ ha media e varianza rispettivamente uguali a

$$\mu = \mu_X + \mu_Y \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Osserviamo che tale risultato non vale per la deviazione standard, ossia $\sigma \neq \sigma_X + \sigma_Y$. Questa è essenzialmente la ragione per cui è conveniente lavorare con σ^2 e non con σ.

3.3 Media e varianza della distribuzione normale standard -attività-

Aspetti didattici

Cosa. Dopo aver formulato una congettura sui valori della media e della varianza della variabile aleatoria normale standard Z, puntiamo a dimostrarne la validità. Ci soffermiamo sul caso speciale standard poiché la dimostrazione per una generica variabile normale X è solo più complessa computazionalmente, ma non più istruttiva, almeno se condotta secondo l'approccio proposto. In alternativa, si potrebbe pensare di esprimere la variabile X in termini di Z mediante la relazione che caratterizza la standardizzazione e poi utilizzare le proprietà algebriche di media e varianza; ma non possiamo proporre tale approccio nel nostro percorso, dato che abbiamo deciso di di fondare il procedimento di standardizzazione proprio sul valore atteso e sulla varianza della variabile normale, come vedremo nella sezione successiva.

Come. Al di là del risultato, l'attività è utile perché prevede di utilizzare in modo significativo l'integrale come strumento in vista di un obiettivo e in un preciso contesto, non semplicemente per effettuare un calcolo in astratto. Il valore formativo della dimostrazione è poi arricchito dalla possibilità di sfruttare le simmetrie del problema, evitando così di ricorrere al calcolo brutale. Del resto, questa metodologia risolutiva è proprio quella indicata in generale sulle Linee guida provinciali [2].

> Si dovrà ridurre la tendenza a ricercare procedimenti risolutivi standardizzati [...] e si cercherà anche di evitare il più possibile l'uso di formule risolutive da applicare in modo meccanico.

In tal senso l'attività permette di affinare la competenza di dimostrare: con l'intento di verificare un risultato, gli studenti usano strumenti matematici in vista di un obiettivo.

Uso. Il materiale è strutturato nella forma di quesito, suggerimento e risoluzione. Perciò può essere proposto per il lavoro individuale, sempre che gli studenti dispongano con sicu-

[6] Ad esempio, se X rappresenta l'altezza di un individuo in una popolazione, μ e σ hanno la stessa dimensione (ad esempio centimetri), mentre σ^2 ha dimensione di un'area.

[7] Per approfondimenti si veda [30, pag.92].

rezza dello strumento integrale.

Approfondimenti sul ruolo didattico della dimostrazione

Dimostrare è una delle abilità matematiche il cui sviluppo è promosso dalle Indicazioni nazionali e a cui perciò riserviamo particolare attenzione. Del resto l'importanza di tale attività è ampiamente sostenuta da G. Lolli in [16, pag.11]:

> A tenere insieme e dare un senso a tutto è la dimostrazione. Non si deve imparare (e insegnare) *la* matematica, ma *a fare* matematica, e non si fa matematica senza produrre teoremi.

Ma cosa si intende per dimostrazione? In [22, pag.61] è C. Bernardi a indicarlo: "*Una dimostrazione è un ragionamento mediante il quale si stabilisce la correttezza dell'enunciato di un teorema; più precisamente, il ragionamento con cui si deduce quell'enunciato da quanto già conosciamo*". L'autore prosegue distinguendo tra la dimostrazione che si fa nell'ambito della logica e quella in altri contesti matematici: "*Nei manuali di logica si trova una definizione precisa di dimostrazione: un elenco di passaggi elementari, ciascuno giustificato da una regola di deduzione. Questa definizione è inattaccabile, ma nei libri di matematica le dimostrazioni sono scritte in altro modo! Se davvero si dovessero scrivere tutti i passaggi, anche le dimostrazioni più semplici occuperebbero varie pagine*".
Bernardi continua sottolineando l'utilità didattica di tale attività [22, pag.63]:

> [...] una dimostrazione serve a spiegare e a convincere, ma serve anche a organizzare e trasmettere quanto conosciamo su certi oggetti. L'importanza di una dimostrazione non consiste solo nella sua generalità, ma anche nel fatto (significativo sul piano didattico) che *una dimostrazione aiuta a ricordare l'enunciato, a capire le proprietà coinvolte, a porre il discorso nel giusto contesto.*

In realtà, Härting in [12, pag.337] si spinge oltre sostenendo che: "*È consigliabile concepire il concetto DIMOSTRARE nel modo più ampio possibile. Non bisogna collegarlo soltanto ad affermazioni, che espressamente vengono chiamate TEOREMI, ma bisogna che esso includa in sé ogni lavoro deduttivo del pensiero, ivi compresa l'attività di calcolo fino all'esecuzione di algoritmi*".

Un'attività prossima alla dimostrazione è l'argomentazione e anch'essa viene citata nelle Indicazioni nazionali. Entrambe hanno grande rilevanza didattica, ma presentano delle caratteristiche proprie, come precisa Duval in [12, pag.351]:

- *argomentazione*: "fornire argomenti, cioè ragioni a favore o contro una determinata tesi";
- *dimostrazione*: tratta della "verità di una conclusione, o per lo meno il suo rapporto necessario con le premesse".

La tabella seguente [12, pag.336] mette ancor più in evidenza il carattere proprio delle due attività: nell'argomentazione pesa maggiormente l'analisi semantica, nella dimostrazione quella sintattica.

	Argomentazione	**Dimostrazione**
Passaggio da una proposizione ad un'altra	Si usano regole implicite che dipendono dalle strutture linguistiche e dalle rappresentazioni scelte; entra in gioco il metalinguaggio ed il significato delle singole proposizioni; siamo dunque in piena fase semantica	Si usano regole di derivazione che devono (dovrebbero) essere state esplicitate in precedenza o concordate; le proposizioni non veicolano contenuti semantici particolari, ma intervengono per il loro ruolo (esempio: premessa, conseguenza) passo dopo passo, nel corso della dimostrazione

Preso atto di tale distinzione, rimane da considerare quali accorgimenti didattici è opportuno adottare affinché tali attività risultino realmente formative. A tal proposito è determinante la riflessione di Perelman in [12, pag.343]:

> Se c'è un punto di sostanziale accordo tra tutti i ricercatori, è che lo studente deve essere coinvolto sia sul piano della produzione di dimostrazioni, sia sul piano della riflessione su quel che si fa quando si fa una dimostrazione, anche in base alle ricerche condotte da Galbraith con le quali si dimostra l'enorme divario che c'è tra le attese dell'insegnante e le reali consapevolezze critiche degli allievi.

Egli chiarisce tale posizione discutendo di un caso specifico: "*Il controesempio di un enunciato, che nella mente dell'insegnante ha un ben preciso scopo dimostrativo, non viene recepito come tale dallo studente che non ne coglie il senso ma si limita a considerarlo come un'informazione in più*".

4 Standardizzazione

Chiariti i termini, si pone ora il problema di calcolare valori di probabilità relativi ad una variabile aleatoria come quella normale, che non ammette primitive della funzione densità esprimibili elementarmente. L'approccio da seguire viene illustrato mediante due video.

4.1 Standardizzazione della variabile aleatoria normale -video-

Cosa. Nel video illustriamo il processo di standardizzazione della variabile aleatoria normale. L'importanza del tema è stata sottolineata anche dall'UMI-CIIM, che lo inserisce nel syllabus di matematica per i Licei scientifici [3, paragrafo "Dati e previsioni"]:

> operazione di standardizzazione: sua importanza nel confronto e studio di distribuzioni statistiche e di probabilità e per l'utilizzo in modo corretto delle tavole della distribuzione normale standardizzata.

In effetti, al di là del suo impiego per calcolare valori di probabilità, standardizzare è utile per confrontare valori relativi ad uno stesso carattere, ma rilevati con *criteri diversi*. Ad esempio, i voti ottenuti in due prove, una valutata in centesimi e l'altra in trentesimi.

Come. L'intento principale del video è illustrare un approccio che possa essere ricostruito dallo studente anche a lungo termine. Non forniamo dunque una sterile ricetta da applicare per risolvere gli esercizi: allo studente viene costantemente indicato l'obiettivo parziale che si vuole raggiungere e vengono esplicitate le ragioni sottese ai vari passi.

Uso. Il video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale" si presta ad essere esaminato individualmente, così da sfruttare la possibilità di interromperne la visione per rielaborare alcuni passaggi oppure per riprendere alcune sezioni non comprese. In sostanza dunque, il materiale permette allo studente di procedere secondo il proprio ritmo di apprendimento. Comunque l'obiettivo pratico, che è bene esplicitare ai ragazzi, resta quello di determinare delle probabilità; pertanto è importante curare anche la comprensione globale della questione. Allo scopo può servire richiedere di produrre uno schema scritto e personale, dell'intero procedimento.

4.2 Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale standard -video-

Cosa. Il video completa l'esame del procedimento che conduce a valutare probabilità relative alla distribuzione normale. Precisamente, illustra il calcolo di probabilità relative alla variabile aleatoria normale standard mediante opportune tavole. Naturalmente, per effettuarlo si può ricorrere anche ad altri strumenti, come il foglio di calcolo oppure il software Geogebra. Ma di questo ci occuperemo più avanti.

Come. La scelta didattica che caratterizza questo segmento di percorso è mostrare esplicitamente allo studente un possibile schema di ragionamento per risolvere il problema. Precisamente l'idea è esaminare ciò di cui si dispone (le tavole) per poterlo utilizzare in vista di un obiettivo specifico (calcolo di probabilità relative alla variabile aleatoria standard). Si comprende, perciò, che tale riflessione assume una valenza più generale rispetto al contesto specifico in cui è ambientata.

Tornando al nostro procedimento di calcolo, abbiamo deciso di illustrarlo in dettaglio, passo per passo; è un esempio di attenzione metacognitiva al processo (tutto il procedimento descritto minuziosamente) più che al prodotto. Ciò è dovuto essenzialmente a ragioni di chiarezza espositiva, ma comporta dei rischi didattici sui quali non sempre si riflette. Ossia, come ammonisce R. Zan [24],

> [...] il "bravo" insegnante cerca di risparmiare all'allievo fatica, insuccesso, problemi, in nome naturalmente del "bene" dell'allievo stesso. In altre parole tende ad assumere completamente su di sé la responsabilità del processo di insegnamento/apprendimento.
> In realtà questa è una contraddizione: perché una delle principali responsabilità dell'insegnante è proprio quella di far sì che l'allievo si assuma la responsabilità dell'apprendimento.

Perciò, nella pratica didattica è opportuno proporre anche attività meno strutturate, in cui lo studente sperimenta le difficoltà in prima persona, ma può così gustare la soddisfazione di aver raggiunto l'obiettivo contando sulle proprie forze, accrescendo il senso di autoefficacia.

Uso. La modalità d'uso prevista per il video "Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale standard" è analoga a quella del precedente.

4.3 Calcolo di probabilità relative alla distribuzione normale

Cosa. Si tratta di una sintesi motivata del procedimento esaminato nei due video. In realtà, tale rielaborazione dovrebbe venir prodotta dallo studente stesso, magari opportunamente guidato dal docente, perché consente di far proprio il contenuto dei video e di poterlo così spendere in situazioni specifiche.

Come. Le scelte didattiche qui sottese sono quelle che stanno alla base dei due video.
Nell'esaminare tali materiali, gli studenti passano da un registro all'altro, a più livelli: dal punto di vista grafico a quello analitico, dal materiale audio-visivo alla formalizzazione scritta. Tale metodologia didattica, che viene proposta a più riprese nel percorso, permette di attivare le diverse forme di pensiero che sono caratteristiche di ogni studente e fornisce l'occasione per esercitare anche quelle che non sono a lui più congeniali, arricchendo così il suo patrimonio cognitivo. Il fondamento di tale approccio è negli studi dello psicologo Howard Gardner[8]:

> [...] risulta ampiamente documentato che mentre l'approccio all'apprendimento di alcuni è primariamente linguistico, quello di altri privilegia un percorso spaziale o quantitativo. [...] riuscire a presentare le discipline in una molteplicità di modi diversi e a valutare l'apprendimento con una varietà di mezzi altrettanto diversi vorrebbe dire servire meglio tutta la vasta e variegata gamma di studenti che popolano le scuole e, forse, contribuire alla crescita della società intera.

Uso. Questa sintesi è uno strumento aggiuntivo che forniamo agli studenti per compren-

[8] H. Gardner, *Educare al comprendere*, 2002, Feltrinelli.

dere i video, ma *non* li sostituisce e non va solamente letta. Costituisce uno schema di riferimento per i ragazzi che non sono abituati a produrne autonomamente: lo scopo ultimo è che sulla base di questo, essi riescano a realizzare sintesi analoghe, a supporto dello studio, anche in altri contesti.

4.4 Media e varianza della variabile aleatoria standardizzata -attività-

Aspetti didattici

Cosa. Nel video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale" sono stati ricavati alcuni risultati unicamente per via intuitiva, pertanto ora indirizziamo gli studenti alla loro dimostrazione formale. Comunque, come già osservato in altri contesti, riteniamo che la comprensione intuitiva del procedimento che conduce alla variabile aleatoria standardizzata $\frac{X-\mu}{\sigma}$ sia più importante della sua verifica rigorosa.

Come. Spesso i libri di testo, anche della scuola secondaria di secondo grado, usano i simboli E e V per indicare rispettivamente media e varianza di una variabile aleatoria. Noi li introduciamo per la prima volta con questa attività e nemmeno nella richiesta iniziale, perché gli studenti hanno già molti nomi e simboli da ricordare e tale notazione diventa fondamentale solo nella dimostrazione. Infatti essa prevede di esprimere media e varianza di più variabili aleatorie e i simboli abbreviano la scrittura e facilitano davvero la comunicazione rispetto al linguaggio naturale. D'altra parte, questo è proprio uno dei motivi per cui più in generale si utilizza il formalismo matematico. L'attenzione didattica consiste nel fatto che in questa attività la sua introduzione è dettata da un'esigenza, che, per come è strutturata, è dello studente, non del docente.

Uso. L'attività si può effettuare come lavoro individuale, dato che i materiali sono organizzati nella forma suggerimento e dimostrazione.

Approfondimento teorico - $\frac{X-\mu}{\sigma}$ è una v.a. normale standard-

Con l'attività del paragrafo **??**, gli studenti dimostrano che la variabile aleatoria $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ha media 0 e varianza 1. Prima di ciò, però, occorrerebbe verificare che tale variabile si distribuisca ancora secondo una curva normale. La proposizione seguente completa la dimostrazione.

Proposizione. *Sia X una variabile aleatoria normale e $a, b \in \mathbb{R}$ dove $a > 0$. Allora la variabile aleatoria $aX + b$ ha ancora distribuzione normale.*

Dimostrazione. Se X è una v.a. normale di parametri μ e σ^2, vale

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x$$

Definiamo la v.a. $Y = aX + b$; allora

$$P(Y \leq t) = P(aX + b \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x$$

Effettuando la sostituzione $Y = aX + b$, risulta

$$P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2} \frac{\mathrm{d}y}{a} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}} \, \mathrm{d}y$$

e questo significa che la variabile aleatoria Y ha distribuzione normale di parametri $b + a\mu$ e $\sigma^2 a^2$. $\square$

Torniamo allora alla nostra situazione: sia X una variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2. Per la proposizione precedente, la variabile $\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$ ha distribuzione normale di parametri $\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$ e $\frac{\sigma^2}{(\sigma)^2} = 1$, ossia coincide con una distribuzione normale standard. L'operazione $X \longrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}$ si chiama **standardizzazione** di X e fornisce, per ogni variabile aleatoria normale X, una variabile normale standard.

4.5 Probabilità con la variabile aleatoria standardizzata -attività-

Cosa. Vogliamo a questo punto dimostrare il risultato che sancisce la validità operativa del procedimento di standardizzazione: la probabilità relativa alla variabile aleatoria normale X è uguale alla probabilità relativa alla v.a. standardizzata $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, pur di valutarla nell'intervallo corrispondente.
Tale uguaglianza è stata prospettata solo a livello intuitivo nel video "Standardizzazione della variabile aleatoria normale", ripercorrendo graficamente la costruzione fatta. Si tratta ora di provarlo formalmente usando gli integrali.

Come. Nell'attività gli studenti hanno nuovamente la possibilità di lavorare con gli integrali in vista di un obiettivo. In particolare, è un contesto interessante in cui sfruttare la formula di sostituzione, che spesso nella secondaria rimane confinata nell'ambito degli esercizi di calcolo.

Uso. La modalità d'uso è analoga a quella dell'attività precedente.

5 Aspetti di calcolo

5.1 Un esempio di calcolo -attività-

Cosa. È un esercizio[9] essenzialmente di calcolo che lo studente dovrebbe risolvere sulla base delle indicazioni fornite nei due video illustrati nei paragrafi precedenti. Del resto, il fatto che egli lo sappia risolvere costituisce un indicatore pratico e immediato per stabilire se ha compreso la sostanza del procedimento di standardizzazione.

Come. In sostanza si mette lo studente nella condizione di utilizzare ciò che sa per imparare cose nuove (il contenuto dei video) e applicarle in situazioni specifiche.
L'attività dunque fornisce un'ottima occasione per sviluppare abilità metacognitive: lo studente viene invitato a riflettere sul ragionamento seguito per affrontare la questione e ad acquisire maggior consapevolezza sul proprio modo di apprendere. Come afferma R. Zan [23, pag. 167], si riconoscono

> due aspetti nello studio della metacognizione, distinti ma correlati:
> - La conoscenza che l'individuo ha su se stesso come soggetto che apprende e sulle risorse che ha disponibili: è l'aspetto della consapevolezza [...].
> - L'autoregolazione, il monitoraggio e l'orchestrazione delle proprie abilità cognitive: è l'aspetto del controllo [...].

Naturalmente si tratta di un'attività delicata, che non si completa certo in un solo incontro e va condotta trasversalmente a più discipline, dato che è strettamente intrecciata con le convinzioni che lo studente ha su di sé e sulla matematica, ma anche con aspetti affettivi, quali emozioni e atteggiamenti.

Uso. L'attività presuppone che gli studenti abbiano esaminato prima i video e lavorato sulla loro sintesi. Per le ragioni appena esposte, il lavoro va svolto in modo autonomo; ad esso è comunque opportuno aggiungere altri esercizi di consolidamento, desunti magari dal libro di testo.

5.2 Valori di probabilità notevoli -attività-

Cosa. Prima di effettuare il calcolo della probabilità, è utile che gli studenti si siano formati un'idea qualitativa di quanto è grande il valore di probabilità richiesto. Per attuare tale intento, però, dovrebbero conoscere opportuni valori di probabilità da utilizzare come riferimento. Questa è la ragione sottesa a tali esercizi, che non si esauriscono dunque in un approccio di natura strettamente mnemonica.

Come. Per quanto osservato, l'attività costituisce la base su cui sviluppare abilità fondamentali, quali la previsione e il controllo dei risultati. Esse sono didatticamente importanti, poiché focalizzano l'attenzione sui processi prima che sui risultati e dunque favoriscono lo sviluppo di capacità metacognitive.

[9]Cercheremo, per quanto possibile, di distinguere tra esercizio e problema nel senso ben indicato da B. D'Amore in [12, pag.284]: *"Si ha un* ***esercizio*** *quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se non ancora in corso di consolidamento. [...] Si ha invece un* ***problema*** *quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore. [...] Non è il testo in sé a costituire un esercizio o un problema, ma un complesso legato a situazioni didattiche, capacità individuali e mille altri fattori, tra i quali l'intenzione didattica del proponente ed il livello scolastico."*

Uso. L'attività si presta per esser assegnata come lavoro individuale.

Nota. Può essere interessante per gli studenti far loro osservare che 2σ è un valore spesso preso come riferimento: lo ritroviamo per esempio nei sondaggi (solitamente la stima sul campione è "vicina" alla probabilità sull'intera popolazione con una probabilità del 95%) e sui medicinali.

5.3 Valori di probabilità mediante il foglio elettronico -attività-

Cosa. Come anticipato nel paragrafo 4.2, ci sono altri strumenti, oltre le tavole, che permettono di calcolare probabilità relative alla v.a. normale standard. Non vederle ci sembrerebbe anacronistico.
Ad esempio, il software Geogebra offre una visualizzazione grafica molto espressiva e quindi la possibilità di mostrare allo studente più punti di vista.

Come. Excel e Geogebra sono strumenti informatici che vanno utilizzati in modo critico: non è didatticamente significativo un loro utilizzo fine a sé stesso, ma ha senso se concorre a sviluppare le abilità discusse nei paragrafi precedenti. Queste, d'altronde, sono le indicazioni metodologiche segnalate nelle Linee guida provinciali [2].

> Nel guidare lo studente all'uso corretto di calcolatrici e computer, si dovrà puntare l'attenzione sul controllo della significatività del dato ottenuto, cercando di accrescere la consapevolezza del vantaggio e dei limiti nell'utilizzo di tali strumenti.

Insomma, come diceva una famosa pubblicità, "la potenza è nulla senza il controllo".
Inoltre, l'utilizzo di strumenti informatici offre l'occasione per curare la formalizzazione: un errore di sintassi assume una valenza concreta dato che il software in tal caso non restituisce nulla. Questo è quanto osservano anche Mariotti e Maffei [17, pag. 89] parlando di un particolare software didattico, il micromondo Aplusix.

> L'allievo infatti, per sottostare al vincolo del micromondo, che non permette di proseguire se si è commesso un errore, è obbligato a prenderne coscienza e, in mancanza di supporto immediato dell'insegnante, a farsene carico in prima persona, impegnandosi in tal modo in una ricerca autonoma del superamento della difficoltà incontrata.

Dunque, in questo contesto, formalizzare è un'esigenza *dello strumento*, non del docente, e si trasforma da imposizione astratta a necessità dello studente.

Uso. Il docente può introdurre questo materiale e poi discuterlo con gli studenti in modo che essi possano usare anche Excel o Geogebra (questo meglio se in fase finale di controllo) nella risoluzione degli esercizi. Ciò può avvenire anche prima, non necessariamente in questo punto del percorso.

6 Applicazioni

6.1 Un problema diretto: la produzione di barre

Cosa. Il primo punto di questo esercizio è stato assegnato in un esame di Stato del 1998 e rappresenta una buona occasione per gli studenti di lavorare su un contesto vicino al reale. D'altra parte, come sostiene B. D'Amore in [12, pag.286],

> si è anche sviluppato un grande dibattito internazionale sul significato dell'aggettivo reale, quando si afferma che le situazioni problematiche *devono* trarre spunto dalla vita reale. [...] Su queste supposte necessità molti hanno espresso dubbi.

Da un punto di vista più tecnico, inoltre, si può fare un'osservazione sulle cifre indicate nel testo: per avere barre senza modifiche, si ammette un errore al massimo del 1% sulla lunghezza ottimale della barra e, invece, del 30% sul diametro della sua sezione!
Il secondo punto dell'esercizio, invece, lo abbiamo aggiunto per dar significato e rendere concreto il risultato appena trovato.

Uso. Il materiale è pensato per poter esser assegnato come lavoro individuale per gli studenti.

6.2 Un problema inverso: il periodo di funzionamento di un prodotto

Cosa. Questo è un esempio di problema che denotiamo come "inverso": noto il valore di probabilità, si chiede di ricavare l'intervallo di variabilità della v.a. normale. Per risolvere questa questione, lo studente deve quindi leggere le tavole in verso contrario rispetto a quello seguito nel paragrafo precedente.

Come. L'insieme dei due approcci al problema, diretto e inverso, permette una comprensione ancor più profonda della situazione, come spesso accade quando si conduce un'analisi da più punti di vista.
Un esempio significativo a tale proposito può essere lo studio del segno di una funzione: quando hanno davanti l'espressione analitica o il grafico di una funzione, gli studenti spesso sanno come impostare lo studio richiesto, ma rischiano di bloccarsi se, all'inverso, si fissa l'intervallo in cui una funzione è positiva e si chiede loro di tracciare un possibile grafico.

Uso. Analogamente all'esercizio diretto, si può assegnare come lavoro individuale, meglio se con una presentazione del docente.

6.3 Altezze di una popolazione: aspetti quantitativi

Cosa. Torniamo ad occuparci della distribuzione delle altezze di una popolazione omogenea: è una delle situazioni che ha motivato lo studio del modello probabilistico normale e a questo punto del percorso gli studenti dispongono degli strumenti per affrontarla quantitativamente.

Come. Con le opportune attenzioni, si tratta ormai di seguire un procedimento che non ha nulla di nuovo rispetto a quello adottato nei precedenti. Per questo riportiamo solamente il risultato finale.

Uso. Per quanto appena osservato, il materiale si presta ad essere assegnato a supporto del lavoro autonomo dello studente.

6.4 La curva normale: l'ordine nel caos -lettura-

Cosa. Fin qui abbiamo esaminato soprattutto gli aspetti quantitativi legati alla distribuzione normale, ossia ci siamo occupati di calcolare valori di probabilità; ma non abbiamo ancora utilizzato i nuovi strumenti in nostro possesso per interpretare anche qualitativamente delle situazioni reali. A tale proposito, un riferimento davvero interessante è costituito da alcuni passi del libro di Mlodinow [34]. Essi forniscono il contesto in cui ambientare domande mirate che ne permettano un utilizzo attivo da parte dello studente.

Come. L'attenzione è rivolta allo sviluppo di *competenze* quali l'interpretazione di testi, l'argomentazione... che riteniamo complementari a quelle sottese alle attività che abbiamo discusso nei paragrafi precedenti. In questo modo riprendiamo altre situazioni che avevano giustificato lo studio della distribuzione normale all'inizio del nostro percorso ed esaminiamo quali informazioni si possono dedurre su di esse ricorrendo al modello probabilistico di cui lo studente ormai dispone in questa fase del percorso.
Per aumentare l'efficacia didattica di tali letture, riteniamo sia opportuno integrarle con domande mirate. Per esempio dopo il segmento di lettura relativo alle altezze di 100.000 giovani francesi chiamati alla leva, si può proporre allo studente una questione del tipo: "Secondo te, per quali ragioni l'andamento della distribuzione delle altezze si discosta da quello della distribuzione normale intorno al valore $1,56$ m?". Tale domanda si può accompagnare con un suggerimento opportuno quale: "Le misure effettuate potrebbero essere state distorte. Perché?".
Naturalmente affinché ciò abbia senso è opportuno suddividere il brano in più blocchi, consegnando allo studente la parte in cui è contenuta la risposta solo in un secondo momento.

Uso. Il modo più immediato e semplice di utilizzare il materiale è quello di proporne integralmente la lettura, magari attraverso il lavoro autonomo a casa che si conclude con la schematizzazione degli aspetti matematici nuovi incontrati nel testo. Più efficace sarebbe integrare il testo con opportune domande, secondo quanto discusso precedentemente. In tal caso è significativo richiedere allo studente la risposta scritta ai quesiti proposti, in modo che possa affinare le competenze argomentative.

7 Il TLC

7.1 Esplorazioni: i parametri -attività-

Cosa. Ora disponiamo di vari strumenti relativi alla variabile aleatoria normale, dunque possiamo comprendere più a fondo il risultato di approssimazione introdotto all'inizio del percorso. In particolare, investighiamo sui valori da attribuire ai parametri della distribuzione normale affinché essa approssimi una certa distribuzione binomiale.

Come. Ha senso effettuare tale lavoro con un approccio operativo-sperimentale: si tratta di un'attività di scoperta che lo studente può svolgere tramite il file Geogebra proposto. Va osservato che le richieste sono di tipo volutamente qualitativo e dunque non ammettono una risposta univoca. Anche per questo, come del resto in varie altre parti del percorso, quanto scrive lo studente non deve necessariamente coincidere con quanto si trova sui materiali e ciò va esplicitato alla classe. A tal proposito è significativa l'osservazione di R. Zan [23, pag. 27-28]:

> [...] implicita nella preoccupazione di evitare domande "troppo difficili" c'è spesso la valorizzazione della correttezza dei prodotti, che viene considerata più importante dell'attivazione di processi di pensiero significativi [...]. È il compromesso delle risposte corrette, denunciato dallo psicologo americano Howard Gardner: un comodo patto fra insegnanti e studenti, che si accordano sul fingere che la risposta corretta garantisca comprensione.

Uso. L'attività si presta ad esser svolta individualmente, anche a casa, e si avvale del file Geogebra NormaleBinomiale1.ggb. Al docente spetterà poi raccogliere le considerazioni fatte e discutere le conclusioni con gli studenti.

7.2 Esplorazioni: il numero di prove -attività-

Cosa. Fissato il legame tra i parametri della distribuzione normale e quelli della binomiale, è interessante sondare la convergenza, ossia studiare cosa succede al crescere del numero di prove dello schema di Bernoulli.

Come. Le scelte didattiche sottese e le competenze sviluppate sono analoghe a quelle dell'attività precedente.

Uso. Anche se abbiamo preferito presentarlo nella forma di lezione partecipata, il materiale si presta ad essere proposto come lavoro individuale. In ogni caso, è opportuno che lo studente si immerga nelle prove in prima persona, mediante il file Geogebra NormaleBinomiale2.ggb.

7.3 La sostanza del teorema

Aspetti didattici

Cosa. Grazie alle attività esplorative condotte come indicato nei paragrafi precedenti, gli studenti possono apprezzare l'enunciato semplificato del teorema limite centrale. È la nostra seconda formulazione, dopo quella ancor più ridotta presentata all'inizio del percorso.

Certo, il risultato non compare esplicitamente nelle Indicazioni nazionali, ma è assai utile per semplificare il calcolo, come nel nostro problema guida relativo ai sondaggi, ma anche concettualmente, dato che che stabilisce un legame tra due distribuzioni che sono oggetto di studio per lo studente della classe quinta.

Come. Il docente (e anche lo studente) *deve* esser consapevole del fatto che l'enunciato proposto non è preciso, ma d'altra parte è proprio in tale versione che il teorema trova concretamente applicazione in molti problemi di calcolo.
Del resto non ha nemmeno tanto senso appellarsi ad una presunta mancanza di rigore per non presentarlo in classe, dato che il concetto di rigore è cambiato nel tempo, come afferma in ambito didattico Colette Laborde, citata da D'Amore e Sbaragli [13].

> La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in Matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio.

Uso. Questo materiale è stato pensato per una lezione in modalità partecipata.

Approfondimenti teorici

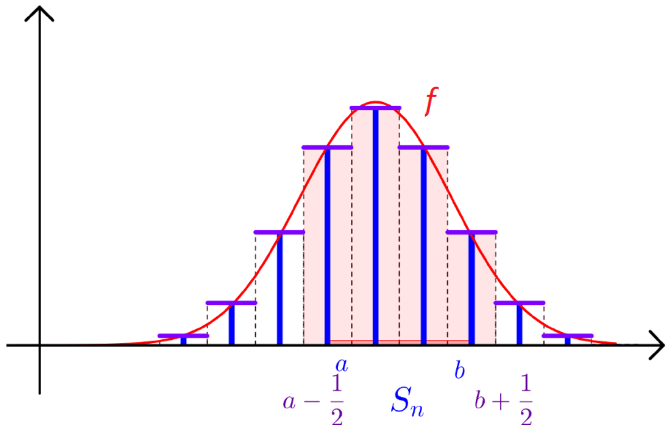
- **Confronto tra distribuzioni**
  Nel trattare l'approssimazione in questione, abbiamo confrontato i grafici di due oggetti matematici diversi: la distribuzione di probabilità $p(s)$ della variabile aleatoria binomiale S_n e la densità di probabilità $f(x)$ della v.a. normale X.
  Mentre nel caso della v.a. binomiale la distribuzione è una funzione i cui valori *sono* valori di probabilità, nel caso della v.a. normale questi sono invece forniti dagli integrali della densità.
  Allora cosa possiamo affermare sul legame tra le probabilità delle due distribuzioni?
  Per rispondere, consideriamo la distribuzione binomiale e valutiamo la probabilità che la v.a. binomiale S_n sia compresa tra due numeri interi a, b, dove $a \leq b$, ovvero

  $$P(a \leq S_n \leq b) = \sum_{j=a}^{b} p(j) \quad \text{con } j \text{ numero intero}$$

  I valori $p(j)$ sono rappresentati dalla lunghezza delle linee in figura e ciascuna di queste può essere sostituita con un rettangolo che ha come base il segmento di estremi $j - 1/2$, $j + 1/2$ e come altezza $p(j)$. Così facendo il valore numerico dell'altezza è uguale all'area del rettangolo corrispondente. Pertanto i valori della distribuzione binomiale si possono interpretare come somma di lunghezze o equivalentemente come area del sottografico della funzione costante a tratti ivi definita, ossia la densità della distribuzione.

  L'interpretazione in termini di aree permette di confrontare due densità, cioè oggetti matematici *dello stesso tipo*. È sulla base di questa interpretazione che ha senso l'approssimazione espressa nel TLC.

- **Dall'approssimazione all'uguaglianza**
  Riprendiamo l'enunciato semplificato del teorema limite centrale.



Ossia, sia S_n la variabile aleatoria binomiale di parametri n e p, dove n rappresenta il numero di prove e p la probabilità di successo nella prova. Sia poi X la v.a. normale di densità f, che ha media μ e varianza σ^2 uguali rispettivamente alla media e alla varianza di S_n, quindi $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Per n "grande" vale

$$P(a \leq S_n \leq b) \simeq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ con a e b fissati, la probabilità relativa alla variabile aleatoria binomiale va a zero, quindi bisogna trovare un'altra strada. L'idea è di operare il confronto con la variabile aleatoria normale standard, ma allora occorre trasformare la v.a. S_n in una v.a. che abbia anch'essa media 0 e varianza 1. Ciò si può ottenere negli usuali due passi:

1. si sottrae il valore atteso np; la nuova v.a. $S_n - np$ ha media 0
2. si divide $S_n - np$ per la deviazione standard $\sqrt{np(1-p)}$; così la nuova v.a. ha varianza 1

Quindi la standardizzata di S_n è

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Allora il TLC si può formulare come segue[10]:

TEOREMA LIMITE CENTRALE -TLC

Sia S_n la v.a. binomiale di parametri n e p, dove n rappresenta il numero di prove e p la probabilità di successo nella prova. Sia S_n^* la v.a. standardizzata di S_n.
Vale

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq S_n^* \leq b) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

dove g è la densità normale standard e a e b sono due numeri reali tali che $a \leq b$.

[10] Per la dimostrazione del teorema e approfondimenti, si vedano [33, da pag.325 a pag.329] e [31,

Il TLC fornisce anche una *giustificazione* dell'uso dell'approssimazione, come mostriamo di seguito.
Per n "grande" fissati α e β, dal TLC segue che

$$P(\alpha \leq S_n^* \leq \beta) \simeq \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

Ricordando la definizione di S_n viene

$$P(\sqrt{np(1-p)}\alpha + np \leq S_n \leq \sqrt{np(1-p)}\beta + np) \simeq \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

Se $a = \sqrt{np(1-p)}\alpha + np$ e $b = \sqrt{np(1-p)}\beta + np$, tale uguaglianza diventa

$$P(a \leq S_n \leq b) \simeq \int_{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Infine, detti $a^* = \frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ e $b^* = \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, arriviamo all'approssimazione

$$P(a \leq S_n \leq b) \simeq \int_{a^*}^{b^*} g(x)\,\mathrm{d}x$$

che abbiamo preso come versione semplificata dell'enunciato formale del teorema limite centrale.

7.4 Applicazioni: finalmente i sondaggi

Cosa. A questo punto del percorso, disponiamo di tutti gli elementi per risolvere il problema relativo ai sondaggi in modo meno dispendioso computazionalmente. Possiamo così concludere la risoluzione del problema guida, che ci ha impegnato fin dall'inizio e che ha motivato l'introduzione degli strumenti matematici di cui ci siamo occupati nel percorso.

Come. Le scelte didattiche sottese alla risoluzione seguono ormai da quelle operate in precedenza, proprio allo scopo di introdurre il TLC. In effetti, il procedimento che conduce alla risposta è una sintesi dell'intero percorso.
Il problema è già stato modellizzato all'inizio del percorso, pertanto si tratta di calcolare effettivamente la probabilità relativa al numero di individui che voteranno uno dei due candidati.
In questa fase, ci sembra significativo curare la sintassi, non in modo fine a se stesso, ma per fissare esplicitamente le relazioni esistenti tra i vari oggetti matematici introdotti via via nel percorso. In quest'ottica distinguiamo tra il simbolo di approssimazione e quello di uguaglianza, riservando il primo all'applicazione del TLC, all'arrotondamento di un numero o alla lettura dei valori dalle tavole di probabilità; invece ricorriamo al simbolo di uguaglianza solo quando i due termini sono proprio uguali.
Un altro aspetto è il calcolo della probabilità relativa alla v.a. standard. A tale proposito ci sembra significativo sfruttare la simmetria dell'intervallo di integrazione, anche se, naturalmente, lo studente non è vincolato a seguire questo approccio; anzi, è opportuno che egli si confronti con più modalità risolutive.

paragrafo 3.2].

Uso. Il materiale può essere utilizzato a supporto di una lezione partecipata, che andrebbe condotta riservando importanza all'argomento, visto che è il nostro problema guida. I ragazzi comunque dovrebbero ormai disporre di tutti gli strumenti per poterlo svolgere individualmente.

7.5 Applicazioni: dall'esame di Stato

Cosa. Questo quesito è stato proposto ben tre volte dal MIUR: in due prove del 2015 (sessione straordinaria italiana di settembre 2015 e sessione ordinaria 2015, scuole italiane all'estero, Americhe) e nella simulazione del 29 aprile 2016, sempre per il Liceo scientifico. Sfruttando il modello binomiale si può risolvere il quesito, ma la seconda richiesta comporta calcoli dispendiosi (ed effettivamente non eseguibili senza un calcolatore), anche se non esplicitamente richiesti nel testo. È qui allora che l'uso del TLC acquista valore, permettendo di risolvere l'esercizio in modo più efficace.

Uso. Gli studenti dovrebbero essere in grado di risolvere tale quesito in modo autonomo. Ad esso vanno poi aggiunti altri esercizi di consolidamento, desunti magari dal libro di testo e/o da altre prove dell'esame di Stato.

Riferimenti bibliografici

Riferimenti relativi alla didattica

Siti

[1] *Indicazioni nazionali per il secondo ciclo di istruzione*, 2010.
http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html

[2] *Linee guida per l'elaborazione dei piani di studio per i Licei*, Provincia autonoma di Trento, 2013.
https://www.vivoscuola.it/lineeguida-secondociclo-licei

[3] UMI-CIIM, *Proposta di un Syllabus di matematica per i Licei Scientifici (nuovo ordinamento)*, 2014.
http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo

[4] *Corso di formazione in didattica della probabilità - DiCoMat Lab in collaborazione con IPRASE.*
http://www.iprase.tn.it/formazione/formazione-docenti-e-dirigenti/corsi/didattica-della-probabilita-per-la-secondaria-di-secondo-grado/

[5] *Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica*, Università degli Studi di Trento.
http://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab

[6] *Moocs for teacher series: "To Flip Or Not To Flip - Discover the flipped classroom methodology"*, Politecnico di Milano.
https://www.pok.polimi.it/courses/course-v1:Polimi+FC101+2016_M9/about

[7] BARRA M. *Teorema del limite centrale a scuola a partire dall'esperienza e con il problem solving. Somma di alcuni numeri aleatori e Metodo di Montecarlo.*
http://www.dmmm.uniroma1.it/accascinamonti/ssis/linguaggiodellincertezza2/1%20TeorLimiteCentrStampa2.pdf

[8] BOLONDI G., VIVIANI *Dispense da corso formazione: aspetti linguistici della matematica*
https://www.google.it/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwid2MCMjrvKAhVGmw4KHc-2CrIQFggfMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.iprase.tn.it%2Falfresco%2Fgd%2Fa%2Fworkspace%2FSpacesStore%2F0bcc9cab-bbff-4557-b764-f90eb42d188f%2Fmateriali%2520Viale%2520Matteo.pdf&usg=AFQjCNE0_RsuVfrT5n_zg4tV3UirPhpsPg&bvm=bv.112064104,d.ZWU

Testi

[9] ANZELLOTTI G. *Valutazione e sviluppo delle competenze matematiche di base dall'obbligo scolastico all'ingresso dell'università*, in *RICERCAZIONE Ricerca educativa, valutativa e studi sociali sulle politiche e il mondo giovanile*, Edizioni Erickson, v.3, n.1 Giugno 2011, pp.173-184.

[10] ANZELLOTTI G., CAPPELLO L., INNOCENTI S. *Matematica: obiettivi, itinerari, interpretazioni*, in *Nuova secondaria*, Editrice La Scuola, v.23, n.1 (2005), pp.91-97.

[11] BARRA M. *Parliamo di probabilità e del suo insegnamento*, Progetto Alice, v.XVII, n.49, 2016.

[12] D'AMORE B. *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice Bologna, 1999.

[13] D'AMORE B., SBARAGLI S. *Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione"* in *La Matematica e la sua Didattica*, n.2/2005, pp. 139-163.

[14] FREUDENTHAL H. *Ripensando l'educazione matematica*, Edizioni La Scuola, 1994.

[15] LANG S. *La bellezza della matematica*, Bollati Boringhieri, 1991.

[16] LOLLI G. *Se viceversa*, edizioni Bollati Boringhieri, 2014

[17] MARIOTTI M.A., MAFFEI L. *Difficoltà in algebra: un intervento di recupero, Parte Prima* in *La Matematica e la sua Didattica*, n.1/2006, pp. 81-99.

[18] MORIN E. *Insegnare a vivere: manifesto per cambiare l'educazione*, Raffaello Cortina Editore, 2015.

[19] PELLEREY M. *Le competenze cosa sono* in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 38 n.5, 2015

[20] ROSSI C. *La matematica dell'incertezza. Didattica della probabilità e della statistica*, Zanichelli, 1999.

[21] SFARD A. *Psicologia del pensiero matematico*, Edizioni Erickson, 2009.

[22] VILLANI V., BERNARDI C., ZOCCANTE S., PORCARO R. *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica*, Edizioni Springer, 2012.

[23] ZAN R. *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Edizioni Springer, 2007.

[24] ZAN R. *I danni del "bravo" insegnante*, in *Le difficoltà in Matematica: da problema per pochi a risorsa per tutti*, Pitagora Editrice, Bologna, 2001.

[25] ZANETTI V. *La fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna, 1989.

Libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado

[26] BARONCINI P., MANFREDI R., FRAGNI I. *Lineamenti.Math.blu*, Volume 5, Ghisetti e Corvi, 2012.

[27] BERGAMINI M., TRIFONE A., BAROZZI G. *Matematica.blu* 2.0, Zanichelli, 2011.

[28] MARASCHINI W., PALMA M. *multi ForMat*, Modulo 24, Paravia, 2002.

[29] SASSO L. *La matematica a colori*, Edizione blu per il quinto anno, Petrini, 2015.

Riferimenti relativi al calcolo delle probabilità

[30] BALDI P. *Introduzione alla probabilità*, McGraw-Hill, Seconda Edizione, 2012.

[31] BONACCORSI S. *Appunti di probabilità*, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, anno accademico 2004/05.

[32] CICCHITELLI G. *Probabilità e statistica*, Maggioli, Prima Edizione, 1990.

[33] GRINSTEAD C.M., SNELL J.L. *Introduction to probability*, AMS, 1997.

[34] MLODINOW L. *La passeggiata dell'ubriaco. Le leggi scientifiche del caso*, Rizzoli, 2009.

[35] PIAZZA R. *I capricci del caso*, Edizioni Springer, 2009.

[36] PRODI G. *Metodi matematici e statistici*, McGraw-Hill, 1992.

[37] TALEB N. N. *Il cigno nero*, ilSaggiatore, 2007.