## 2 Una famiglia di funzioni: aspetti analitici

### 2.1 Prime esplorazioni -attività-

*Considera la funzione* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. *A partire dal suo grafico qualitativo, traccia su un foglio quello di*

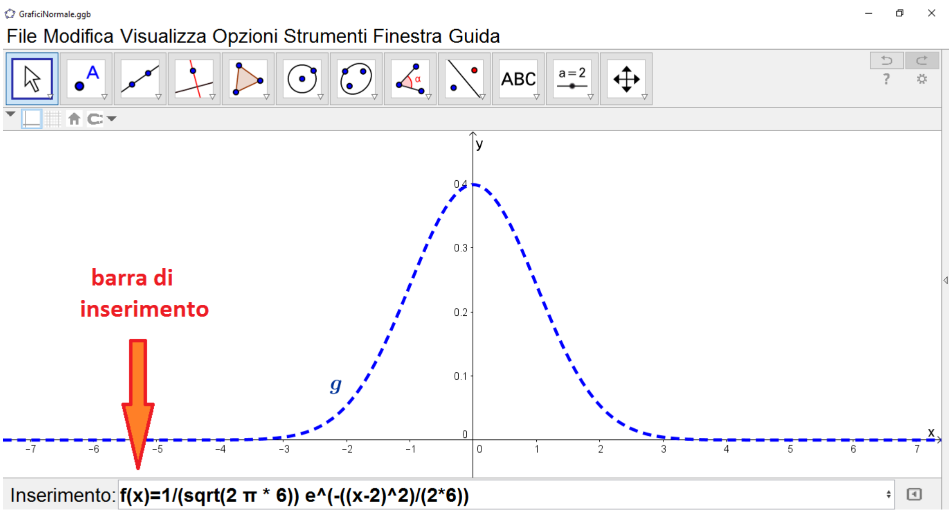
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \textit{dove } \sigma > 0$$

*per i seguenti valori dei parametri:*
**a)** $\sigma^2 = 1$ e $\mu = +1$; **b)** $\sigma^2 = 4$ e $\mu = 0$; **c)** $\sigma^2 = 4$ e $\mu = -1$.
*Controlla poi i tuoi grafici mediante il file Geogebra GraficiNormale.ggb*

**Suggerimento**

Indichiamo con $g$ la funzione definita da $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Osserva che il grafico delle funzioni richieste si può ottenere mediante opportune trasformazioni del grafico di $g$.

**Come si utilizza il file GraficiNormale.ggb**




Inserisci l'espressione analitica della funzione nella barra di inserimento. Dando l'enter viene visualizzato il grafico di tale funzione nella finestra Vista Grafici, dove puoi confrontarlo con quello già presente della funzione $g$.

**Risoluzione**

Partendo dal grafico della funzione $g$, vediamo come dedurre quello della funzione f.

**a)** Per $\sigma^2 = 1$ e $\mu = 1$ (figura 2), il grafico di $f$ si ottiene da quello di $g$ effettuando una traslazione lungo l'asse $x$ di intensità 1 nel verso positivo (ossia una traslazione di vettore $(+1, 0)$). Infatti la funzione $f$ si può esprimere nella forma

$$f(x) = g(x - 1)$$

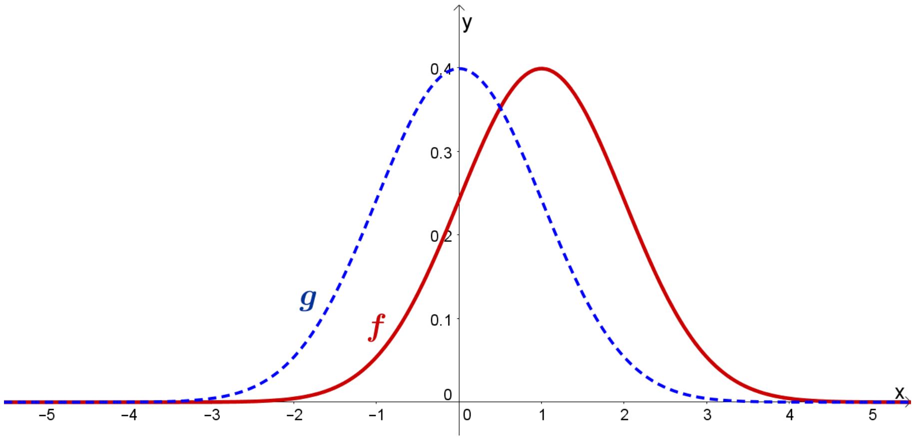



Figura 2: Grafico della densità normale $f$ per $\sigma^2 = 1$ e $\mu = 1$.

**b)** Per $\sigma^2 = 4$ e $\mu = 0$ (figura 3), il grafico di $f$ si ottiene dilatando quello di $g$ del fattore $\frac{1}{2}$ lungo l'asse $y$ e del fattore 2 lungo l'asse $x$. Infatti si ha

$$f(x) = \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right)$$

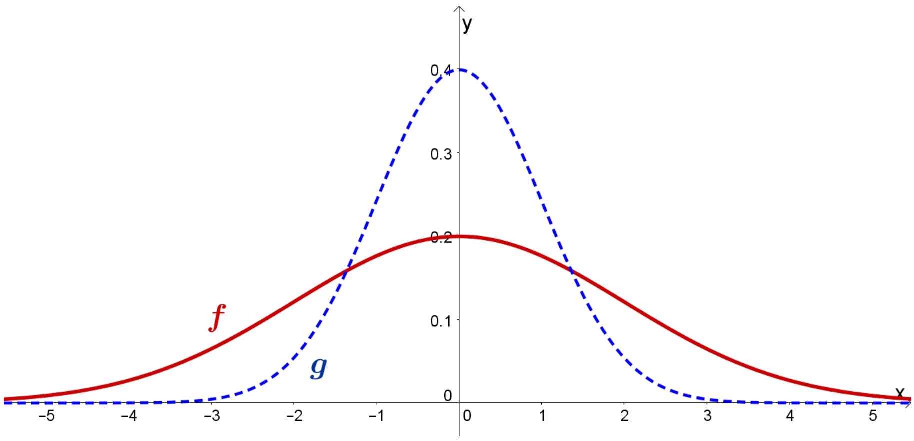



Figura 3: Grafico della densità normale $f$ per $\sigma^2 = 4$ e $\mu = 0$.

**c)** Nel caso $\sigma^2 = 4$ e $\mu = -1$ (figura 4), c'è la composizione di due trasformazioni: una del tipo esaminato nel punto b) e l'altra del tipo esaminato in a). Precisamente:

1. prima si considera la funzione $h(x) = \frac{1}{2}g(\frac{x}{2})$ e dunque una dilatazione del grafico di $g$ del fattore $\frac{1}{2}$ lungo l'asse $y$ e del fattore 2 lungo l'asse $x$;
2. la funzione $f$ si può allora esprimere come $f(x) = h(x+1)$ e dunque una traslazione del grafico di $h$ lungo l'asse $x$ di intensità 1 nel verso negativo (ossia una traslazione di vettore $(-1, 0)$).

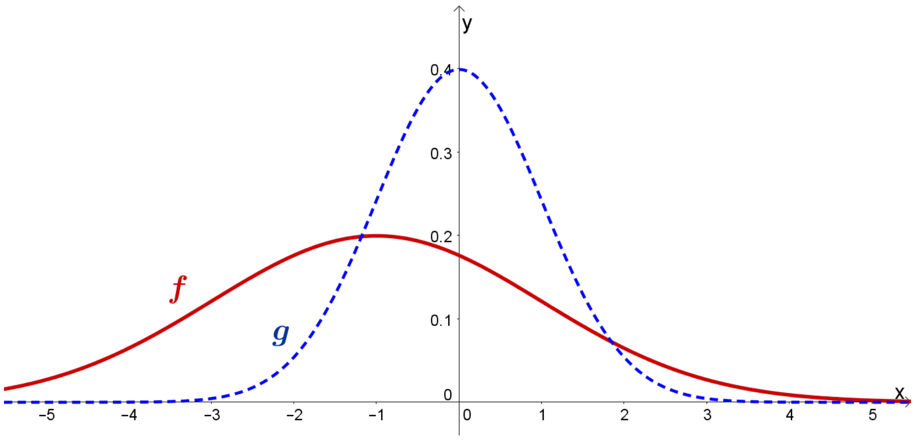



Figura 4: Grafico della densità normale $f$ per $\sigma^2 = 4$ e $\mu = -1$.