2.3 Significato geometrico dei parametri -attività-

Considera la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

al variare dei parametri reali μ, σ *dove* $\sigma > 0$.

a) *Qual è il significato geometrico di* μ*?*

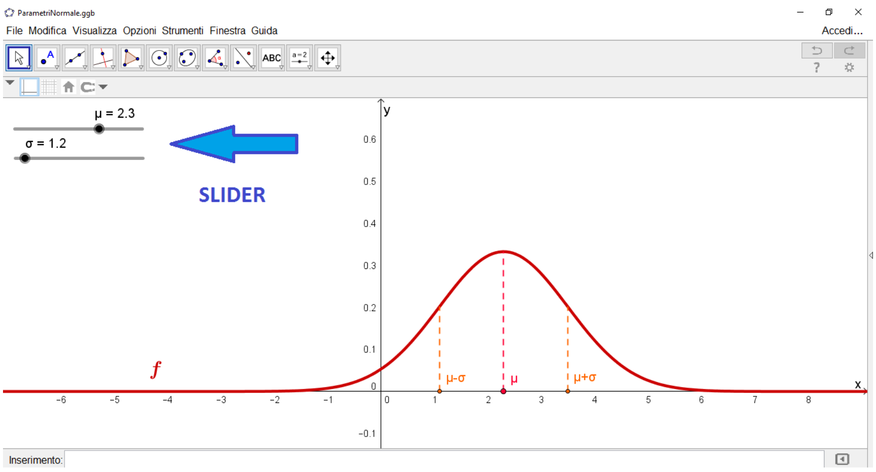
b) *Qual è il significato geometrico di* σ^2*?*

Ossia spiega come varia il grafico della funzione f al variare dei due parametri μ e σ.

Suggerimento

Fissa un valore per un parametro e descrivi come variano i grafici al variare dell'altro parametro. Effettua delle congetture mediante il file Geogebra ParametriNormale.ggb e poi giustificale formalmente.

Come si utilizza il file ParametriNormale.ggb



Il file dispone di due slider, ciascuno relativo ad un parametro della famiglia. Muovendo ciascun cursore variano i valori che si attribuiscono al corrispondente parametro; e dunque variano anche i grafici delle funzioni individuate da tali valori del parametro.

Risoluzione

a) Fissiamo per σ^2 il valore[13] 1. Al variare di μ il grafico di f *trasla* lungo l'asse x (come suggerisce la figura 6). Partiamo, infatti, dal grafico di

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

[13] Per qualsiasi altro valore di σ^2 si giunge alle stesse conclusioni.

Allora

$$f(x) = g(x - \mu)$$

quindi il grafico di f si ottiene da quello di g mediante una traslazione lungo l'asse x di intensità $|\mu|$ nel verso positivo se $\mu > 0$, nel verso negativo se $\mu < 0$.

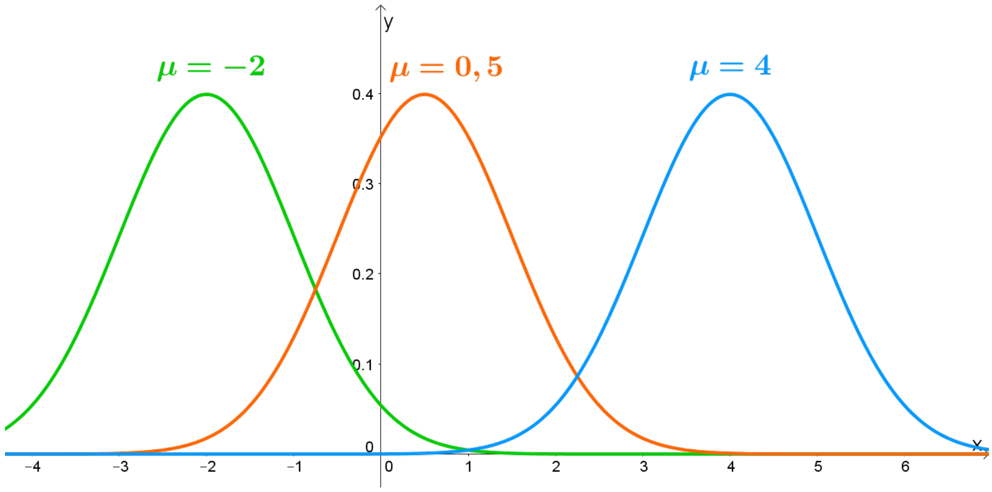


Figura 6: Grafici di f per $\sigma^2 = 1$ e più valori di μ.

b) Fissiamo per μ il valore[14] 0. Al variare di σ^2 il grafico di f si *dilata* (come suggerito in figura 7). Più precisamente, al crescere di σ^2, *cresce* l'apertura del grafico e *diminuisce* il massimo della funzione. Se partiamo, infatti, dal grafico di

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

allora

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

Sull'asse delle x abbiamo una dilatazione di rapporto σ, perciò al crescere di σ^2 la curva si allarga orizzontalmente. Sulle ordinate abbiamo invece una dilatazione del fattore $\frac{1}{\sigma}$ per cui al crescere di σ^2 il grafico di f si contrae verticalmente.

[14] Per qualsiasi altro valore di μ si giunge alle stesse conclusioni.

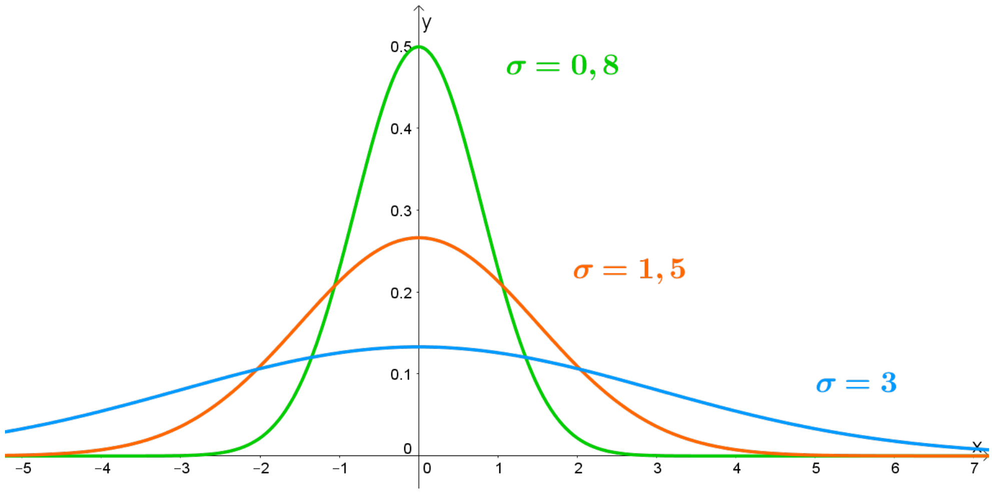


Figura 7: Grafici di f per $\mu = 0$ e più valori di σ^2.

2.4 Conclusioni

Consideriamo la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \textit{dove } \sigma > 0$$

al variare dei parametri reali μ e σ.

Caratteristiche delle funzioni:

- il grafico di f è *simmetrico* rispetto alla retta di equazione $x = \mu$
- la funzione f assume valore *massimo* per $x = \mu$;
  esso è $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- la funzione f ha *flessi* nei punti $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$

Interpretazione geometrica dei parametri:

- al variare di μ il grafico di f *trasla* lungo l'asse x
- al variare di σ^2 il grafico di f si *dilata*. Più precisamente, al crescere di σ^2, cresce l'apertura del grafico e diminuisce il massimo della funzione