3 Una famiglia di funzioni: interpretazione probabilistica

3.1 Funzione di densità

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

è una funzione di densità per ogni $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, con $\sigma > 0$.

Infatti vale:

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
  dato che la funzione esponenziale assume solo valori positivi e σ è positivo per ipotesi[a]

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 1$
  Si può dimostrare[b] che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{dx} = \sqrt{2\pi}\sigma$. Pertanto il fattore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ che compare nella funzione f serve proprio affinché l'integrale di f su $\mathbb{R}$ sia 1

Definizione. La funzione f si dice funzione di **densità normale** (con parametri μ e σ^2) e la variabile aleatoria (spesso abbreviata in v.a.) ad essa relativa si dice **variabile aleatoria normale**.

[a] Anzi $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

[b] Con strumenti di analisi che vanno oltre le competenze liceali.

Osservazione. La probabilità che X sia compresa tra due valori $a, b \in \mathbb{R}$, come per ogni v.a. continua, si può esprimere nella forma:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

dove f è la funzione di densità normale.
C'è però un problema: tale integrale *non* è risolvibile elementarmente, cioè la primitiva di f non si può esprimere mediante una formula che contenga le funzioni elementari e le operazioni usuali. Vedremo nel seguito come risolvere tale questione.