3.3 Media e varianza della distribuzione normale standard -attività-

Consideriamo la variabile aleatoria normale standard, cioè la v.a. continua che ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Mostra che la media di tale variabile è 0 *e la varianza è* 1.

Suggerimenti

a) Ricorda che, per definizione di media, la media della v.a. normale standard è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Per determinare il valore di questo integrale non serve scrivere esplicitamente una primitiva della funzione $x f(x)$: basta osservare che essa è dispari.

b) Secondo la definizione di varianza, quella della v.a. normale standard risulta uguale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$

Per determinare il valore di questo integrale, osserva che la funzione $x^2\, e^{-x^2/2}$ si può scrivere nella forma $x\,(xe^{-x^2/2})$ e dunque si può integrare per parti.

Risoluzione

a) Per trovare la media della v.a. normale standard calcoliamo dunque il seguente integrale:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Osserviamo che la funzione $g(x) = xe^{-x^2/2}$ è dispari, ossia vale $g(-x) = -g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ciò significa che il grafico della funzione g è simmetrico rispetto l'origine degli assi. Tale proprietà ci permette di dedurre direttamente il valore dell'integrale in esame.

Per comprenderlo vediamo una situazione più semplice e consideriamo una funzione h dispari, come quella rappresentata in figura 8. Per ragioni di simmetria, l'area del sottoinsieme del piano delimitato dal grafico di h e dall'asse x nell'intervallo $[-t; 0]$ è uguale all'area del sottoinsieme del piano delimitato dal grafico di h e dall'asse x nell'intervallo $[0; t]$, per qualsiasi reale $t > 0$. Ma la funzione h assume segni opposti in questi due intervalli, per cui

$$\int_{-t}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{t} h(x)\,\mathrm{d}x$$

Pertanto vale anche

$$\int_{-\infty}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

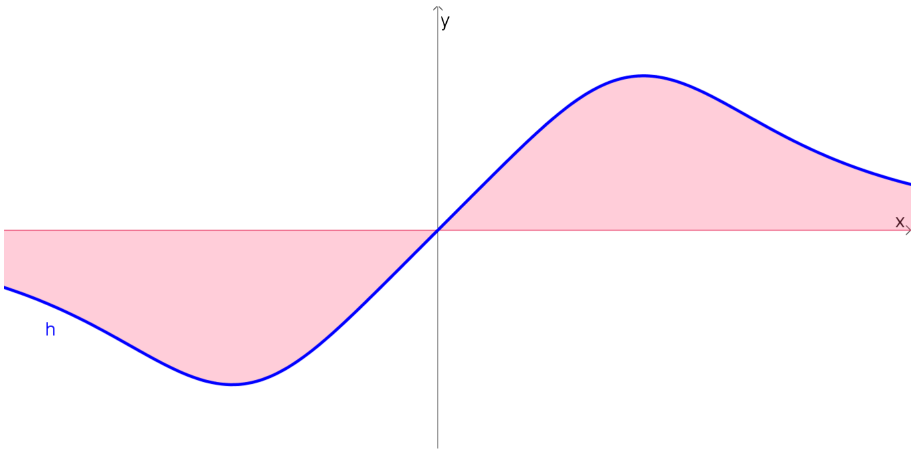

Figura 8: Rappresentazione del sottoinsieme del piano delimitato dall'asse x e dal grafico della funzione $h(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$.

Più in generale, ragionando come nell'esempio, si ottiene che l'integrale su $\mathbb{R}$ di una funzione (integrabile) dispari è 0. Per cui anche nel nostro caso

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Ossia la media della v.a. normale standard è 0.

b) Vediamo ora il calcolo della varianza della v.a. normale standard. Nel nostro caso essa è uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\left(xe^{-x^2/2}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\left(-e^{-x^2/2}\right)'\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[xe^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 0+1=1
\end{aligned}$$

Il primo addendo è 0: essenzialmente ciò è dovuto al fatto che[16] $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x^2/2})=0$. Per determinare il secondo addendo, invece, utilizziamo il fatto che f è una densità (si veda paragrafo 3.1) e dunque vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Concludiamo così che la varianza della v.a. normale standard è 1.

[16] Precisamente:

$$\left[xe^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{k\to-\infty}\left[xe^{-x^2/2}\right]_k^0 + \lim_{h\to+\infty}\left[xe^{-x^2/2}\right]_0^h = \lim_{k\to-\infty}(-ke^{-k^2/2}) + \lim_{h\to+\infty}(he^{-h^2/2}) = 0+0$$

dove con la prima uguaglianza abbiamo esplicitato il significato della prima scrittura.