4.4 Media e varianza della variabile aleatoria standardizzata -attività-

Sia X la variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2.
Dimostra che la variabile aleatoria $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ha media 0 e varianza 1.

Nota. Questo ci permette di concludere che $\frac{X-\mu}{\sigma}$ è[19] una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.

Suggerimento

Usa le proprietà algebriche della media (varianza) per esprimere la media (varianza) di $\frac{X-\mu}{\sigma}$ in termini della media (varianza) della variabile X, dato che questa è nota. In particolare ricorda che per ogni numero c vale

$$\begin{array}{ll} E(cX) = cE(X) & V(cX) = c^2 V(X) \\ E(X+c) = E(X) + c & V(c+X) = V(X) \end{array}$$

Con le notazioni $E(Y)$, $V(Y)$ indichiamo, come si usa spesso, rispettivamente la media e la varianza della v.a. Y.

[19] A rigore, per concludere che la variabile aleatoria così trasformata ha distribuzione normale standard, serve qualche considerazione aggiuntiva. Ma preferiamo non occuparcene.

Risoluzione

Partiamo col calcolare $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$. Sappiamo che $E(X)=\mu$, perciò cerchiamo di ricondurci alla variabile X, usando le proprietà algebriche della varianza:

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu)=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0$$

Abbiamo così provato che la media cercata è **0**.

Calcoliamo ora la $V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$. Come prima cerchiamo di ricondurci alla variabile X visto che di questa sappiamo che la varianza è σ^2. Usando le proprietà algebriche della varianza si ha

$$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$$

Abbiamo così provato che la varianza cercata è **1**.