4.5 Probabilità con la variabile aleatoria standardizzata -attività-

Sia X la variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2. Dimostra che vale

$$P(a \leq X \leq b) = P(a' \leq Z \leq b')$$

dove Z è la variabile aleatoria normale standard e a' e b' sono i valori standardizzati[a] *di a e b.*

[a] Ossia $a' = \frac{a-\mu}{\sigma}$ e $b' = \frac{b-\mu}{\sigma}$.

Suggerimento

Scrivi esplicitamente le due probabilità $P(a \leq X \leq b)$, $P(a' \leq Z \leq b')$ come integrali delle densità delle rispettive variabili. Poi per provare l'uguaglianza richiesta, conviene utilizzare una opportuna sostituzione nell'integrale relativo alla v.a. X.

Risoluzione

Iniziamo esprimendo $P(a \leq X \leq b)$ come integrale della funzione densità di X, cioè

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x$$

Analogamente

$$P(a' \leq Z \leq b') = \int_{a'}^{b'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z$$

Dobbiamo provare l'uguaglianza tra questi due integrali. Osservando gli esponenti nei due integrali oppure i loro estremi di integrazione, ci accorgiamo che conviene effettuare la sostituzione

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

D'altronde si usa la stessa trasformazione per passare dalla v.a. X alla v.a. Z. Pertanto

$$x = \sigma z + \mu \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}z$$

Con tale sostituzione si ha dunque

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \mathrm{d}z \\ &= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Ma, come prima ricordato,

$$\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}z = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Abbiamo così provato formalmente che

$$P(a \leq X \leq b) = P(a' \leq Z \leq b')$$

dove

$$a' = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad \text{e} \quad b' = \frac{b-\mu}{\sigma}$$