5 Aspetti di calcolo

5.1 Un esempio di calcolo -attività-

Il calcolo di probabilità relative alla v.a. normale è illustrato in dettaglio in due video (paragrafi 4.1 e 4.2) che ti consigliamo di esaminare prima di risolvere l'esercizio.

> *Sia X la v.a. normale di media $\mu = 5$ e varianza $\sigma^2 = 9$.*
> *Calcola $P(3,5 \leq X \leq 11)$, ossia la probabilità che X sia compresa tra $3,5$ e 11.*

Risoluzione

Procediamo seguendo il ragionamento visto dettagliatamente nei video e in sintesi nel paragrafo 4.3:

1. Standardizziamo la v.a. X mediante la trasformazione $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Pertanto i nuovi estremi di variabilità di Z diventano[20] $-0,5$ e 2 e vale

$$P(3,5 \leq X \leq 11) = P(-0,5 \leq Z \leq 2)$$

2. Per determinare la probabilità in Z, ricordiamo che le tavole forniscono valori della forma $P(Z \leq k)$ con k positivo. Perciò esprimiamo $P(-0,5 \leq Z \leq 2)$ in termini di probabilità di tale forma:

   - per l'additività dell'integrale sul dominio di integrazione[21]

$$\mathbf{P(-0,5 \leq Z \leq 2)} = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -0,5)$$

   - per la simmetria del grafico della densità normale standard[22]

$$P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5)$$

   In sintesi le ultime uguaglianze ci dicono che

$$\mathbf{P(-0,5 \leq Z \leq 2)} = P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 0,5)$$

3. Andiamo ora a leggere sulle tavole i valori di probabilità richiesti

$$P(Z \leq 2) \simeq 0,9772 \quad \text{e} \quad P(Z \leq 0,5) \simeq 0,6915$$

Possiamo così concludere che

$$\begin{aligned} P(3,5 \leq X \leq 11) &\simeq 0,9772 - 1 + 0,6915 \\ &\simeq \boxed{0,67} \end{aligned}$$

[20] Usando le notazioni del paragrafo 4.3 e dei video, stiamo dicendo che $a = 3,5$ $b = 11$ e $a' = -0,5$ $b' = 2$.

[21] Precisamente $\int_{-0,5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{-0,5} g(x)\,\mathrm{d}x$ dove g è la densità di Z.

[22] Nella seconda uguaglianza passiamo all'insieme complementare.

Osservazione. Nel punto 2. abbiamo fatto ricorso alle proprietà degli integrali e alla simmetria del grafico della funzione densità normale g. E' espressivo (e d'aiuto) interpretare tali probabilità in termini di *aree* sul grafico di g.