5 Aspetti di calcolo

5.1 Un esempio di calcolo -attività-

Il calcolo di probabilità relative alla v.a. normale è illustrato in dettaglio in due video (paragrafi 4.1 e 4.2) che ti consigliamo di esaminare prima di risolvere l'esercizio.

> *Sia X la v.a. normale di media $\mu = 5$ e varianza $\sigma^2 = 9$.*
> *Calcola $P(3,5 \leq X \leq 11)$, ossia la probabilità che X sia compresa tra $3,5$ e 11.*

Risoluzione

Procediamo seguendo il ragionamento visto dettagliatamente nei video e in sintesi nel paragrafo 4.3:

1. Standardizziamo la v.a. X mediante la trasformazione $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Pertanto i nuovi estremi di variabilità di Z diventano[20] $-0,5$ e 2 e vale

$$P(3,5 \leq X \leq 11) = P(-0,5 \leq Z \leq 2)$$

2. Per determinare la probabilità in Z, ricordiamo che le tavole forniscono valori della forma $P(Z \leq k)$ con k positivo. Perciò esprimiamo $P(-0,5 \leq Z \leq 2)$ in termini di probabilità di tale forma:

   - per l'additività dell'integrale sul dominio di integrazione[21]

$$\mathbf{P(-0,5 \leq Z \leq 2)} = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -0,5)$$

   - per la simmetria del grafico della densità normale standard[22]

$$P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5)$$

   In sintesi le ultime uguaglianze ci dicono che

$$\mathbf{P(-0,5 \leq Z \leq 2)} = P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 0,5)$$

3. Andiamo ora a leggere sulle tavole i valori di probabilità richiesti

$$P(Z \leq 2) \simeq 0,9772 \quad \text{e} \quad P(Z \leq 0,5) \simeq 0,6915$$

Possiamo così concludere che

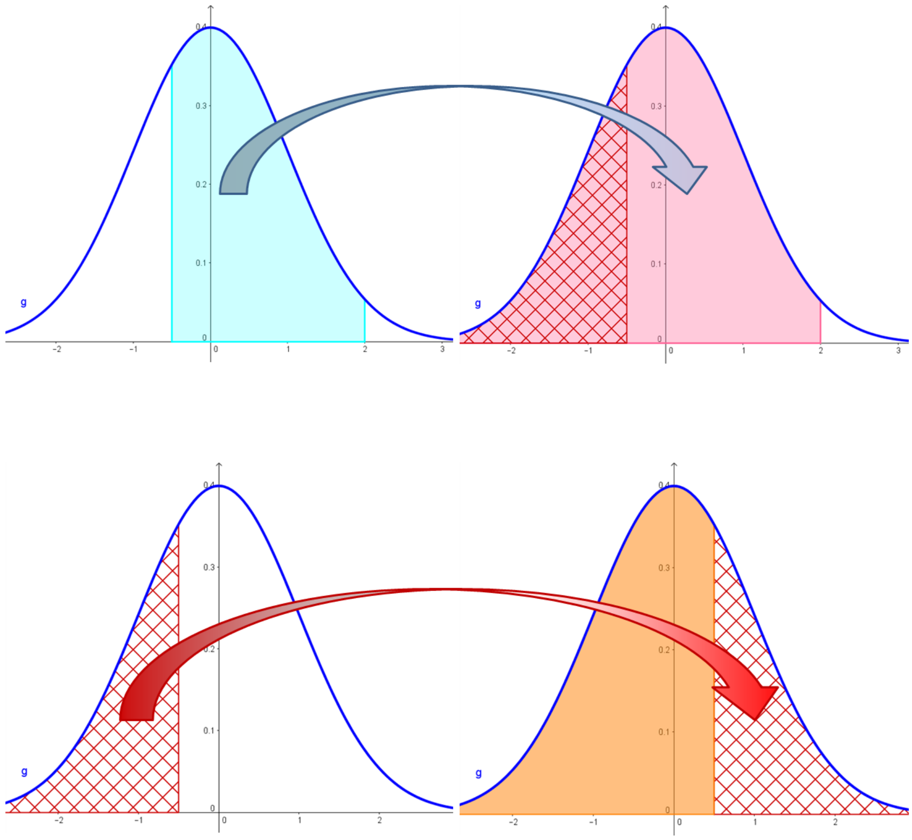
$$\begin{aligned} P(3,5 \leq X \leq 11) &\simeq 0,9772 - 1 + 0,6915 \\ &\simeq \boxed{0,67} \end{aligned}$$

[20] Usando le notazioni del paragrafo 4.3 e dei video, stiamo dicendo che $a = 3,5$ $b = 11$ e $a' = -0,5$ $b' = 2$.

[21] Precisamente $\int_{-0,5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{-0,5} g(x)\,\mathrm{d}x$ dove g è la densità di Z.

[22] Nella seconda uguaglianza passiamo all'insieme complementare.

Osservazione. Nel punto 2. abbiamo fatto ricorso alle proprietà degli integrali e alla simmetria del grafico della funzione densità normale g. E' espressivo (e d'aiuto) interpretare tali probabilità in termini di *aree* sul grafico di g.

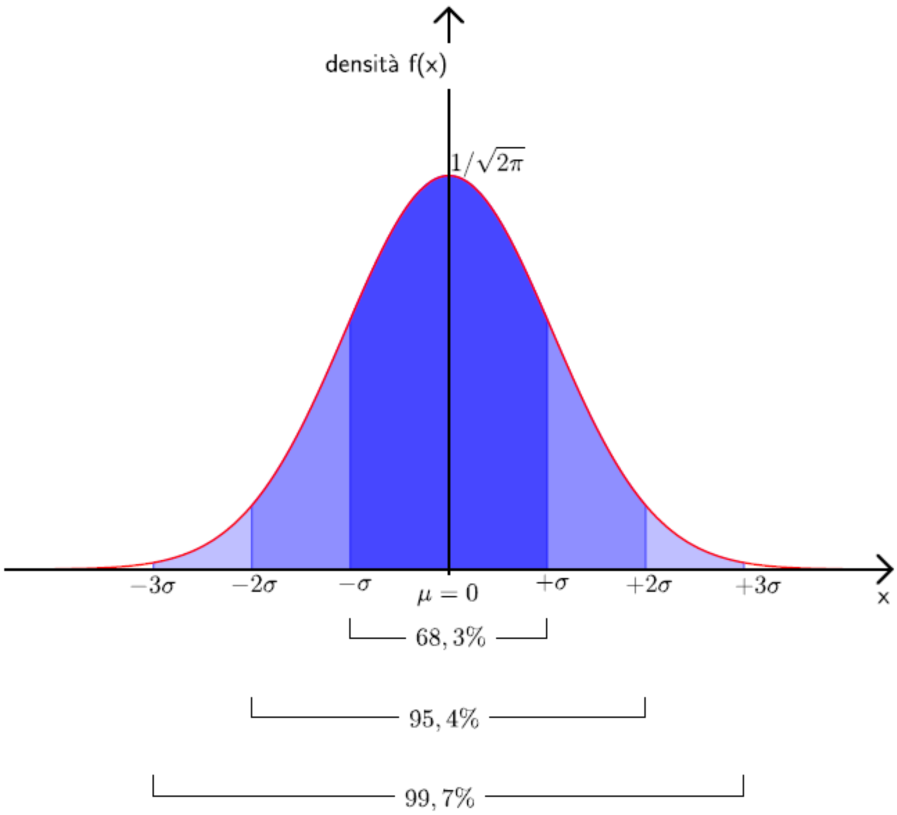


5.2 Valori di probabilità notevoli -attività-

Di solito le tavole della normale standard non riportano valori di Z superiori[23] a 4. Perché? L'attività seguente suggerirà la risposta.

Sia X una variabile aleatoria normale con parametri μ e σ^2.
Verifica che vale

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\simeq 68,3\% \\
P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\simeq 95,4\% \\
P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\simeq 99,7\% \\
P(\mu - 4\sigma \leq X \leq \mu + 4\sigma) &\simeq 100\%
\end{aligned}
$$



[23] Anzi, le tavole considerate nei video non superano il valore 3.

Risoluzione

Mostriamo per esempio[24] la prima approssimazione. Vogliamo valutare la probabilità che la variabile X si discosti dalla media μ di al più una quantità pari a σ.

Per determinare questo valore di probabilità seguiamo il procedimento mostrato nel paragrafo 4.3:

1. standardizziamo la variabile X

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$

2. per la simmetria del grafico della densità normale e per le proprietà degli integrali si ha

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2(P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0))$$

3. ricorrendo alle tavole, otteniamo

$$2 \cdot (P(X \leq 1) - P(Z \leq 0)) \simeq 2 \cdot (0,8413 - 0,5) \simeq \boxed{0,683}$$

In conclusione, la probabilità che la v.a. normale X assuma valori tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ è quasi il 70%.

[24] Analogamente è possibile calcolare gli altri valori di probabilità notevoli.

5.3 Valori di probabilità mediante il foglio elettronico

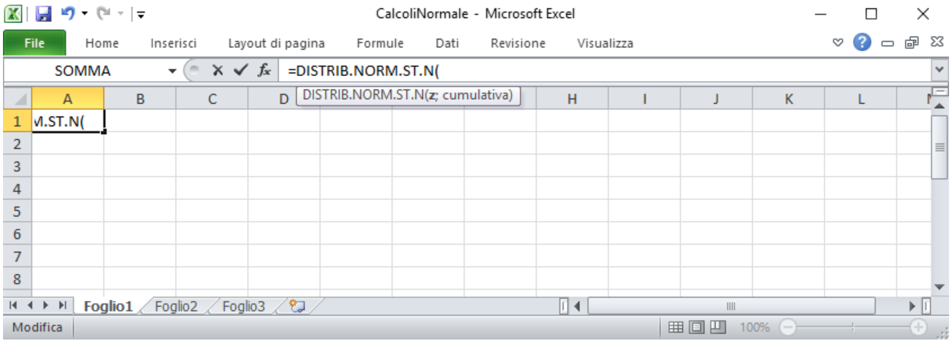
Oltre alle tavole, un altro possibile strumento a cui ricorrere per determinare valori (approssimati) di probabilità è il foglio elettronico, ad esempio Excel.

Su **Excel** sono presenti infatti:

- la funzione $DISTRIB.NORM.ST.N(z; cumulativa)$;

  se cumulativo=VERO, la funzione restituisce il valore di probabilità $P(Z \leq z)$, dove Z è la v.a. normale standard;

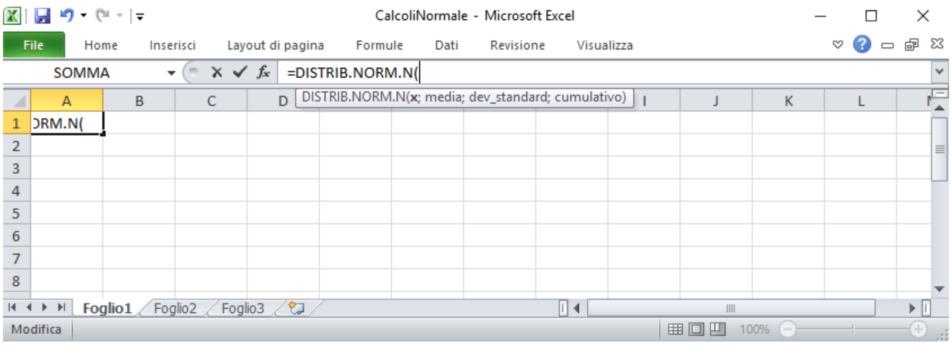
  se cumulativo=FALSO, dà il valore $g(z)$ dove g è la densità di Z.



- la funzione $DISTRIB.NORM.N(x; media; dev\_standard; cumulativo)$

  se cumulativo=VERO, la funzione restituisce il valore di probabilità $P(X \leq x)$ dove X è la v.a. normale con $\mu = media$ e $\sigma = dev\_standard$;

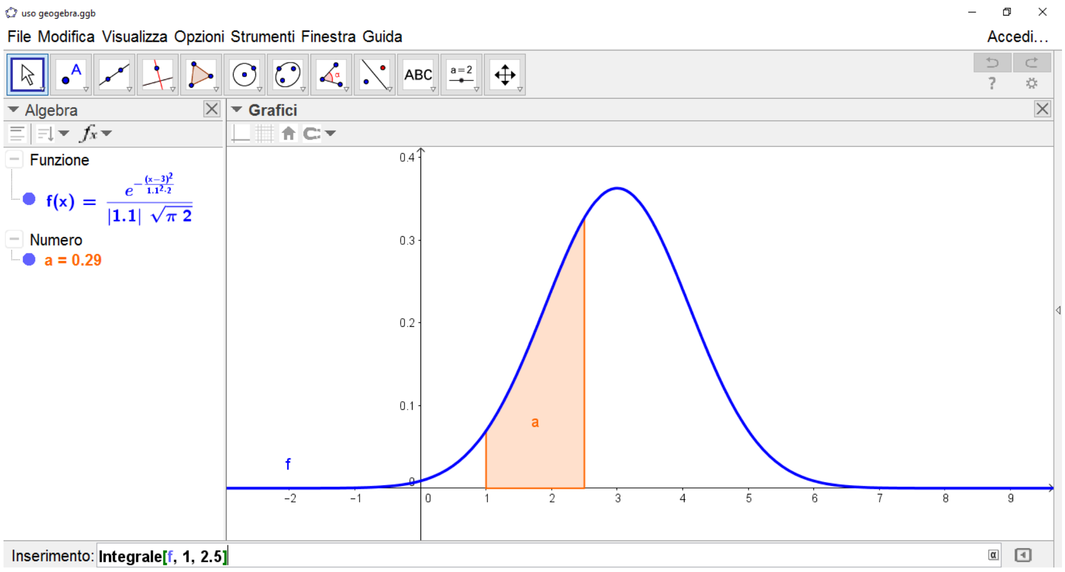
  se cumulativo=FALSO, dà il valore $f(x)$ dove f è la densità di X.



Nelle versioni che precedono Excel 2010, il nome è $DISTRIB.NORM.ST$.

Un ulteriore interessante strumento è **Geogebra**.
Questo software, infatti, permette di calcolare valori di probabilità (non solo relativi alla v.a. normale) come *integrali* della funzione densità.
Precisamente, inserita la funzione di densità (nella situazione in esame, una data densità normale[25]), si digita nella barra di inserimento il comando che serve, in generale, per calcolare l'integrale[26] di funzioni. L'aspetto interessante è che, oltre a restituire il risultato numerico, Geogebra visualizza il sottografico della densità nell'intervallo di integrazione.

Tale strumento ti consente di controllare i procedimenti di calcolo relativi alla v.a. normale.



[25] Comando *Normale[<Media>, <Deviazione Standard>, <x>]*. Questo comando, come gli altri, va digitato nella barra di inserimento. Una volta dato l'enter, viene visualizzato il grafico e l'espressione analitica della funzione che Geogebra indica ad esempio con f.
[26] Comando *Integrale[<Funzione>, <x iniziale>, <x finale>]*; Geogebra indica con a (per esempio) il valore di tale integrale.