# 6 Applicazioni

## 6.1 Un problema diretto: la produzione di barre

Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri ed il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $\mu_1 = 5$ m e scarto standard $\sigma_1 = 4$ cm. Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media $\mu_2 = 4$ cm e scarto standard $\sigma_2 = 0,8$ cm. Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra $4,95$ m e $5,05$ m e la sua sezione tra $2,8$ cm e $5,2$ cm.

**a)** Qual è la probabilità di poter vendere senza modifiche una generica barra prodotta?[a]

**b)** Su 55.000 barre prodotte, quante ci si aspetta di poterne vendere senza modifiche?

[a] La questione è tratta dal problema n.3 della sessione ordinaria PNI, Esame di Stato 1998

**a)** Sia $L$ la v.a normale "lunghezza della barra" e sia $D$ la v.a. normale "sezione della barra". La barra può essere venduta senza modifiche se (e solo se) vale:

$$4,95 \text{ cm} \leq L \leq 5,05 \text{ cm} \quad \text{e} \quad 2,8 \text{ cm} \leq D \leq 5,2 \text{ cm}$$

Il quesito richiede di calcolare la probabilità che si verifichino entrambe le condizioni. Valutiamo innanzitutto la probabilità

$$\mathbf{P(4,95 \leq L \leq 5,05)}$$

1. Standardizziamo la v.a $L$

$$\begin{aligned} P(4,95 \leq L \leq 5,05) &= P\left(\frac{4,95-5}{0,04} \leq Z \leq \frac{5,05-5}{0,04}\right) \\ &= P(-1,25 \leq Z \leq 1,25) \end{aligned}$$

2. Per la simmetria del grafico della densità normale si ha

$$\begin{aligned} P(-1,25 \leq Z \leq 1,25) &= 2P(0 \leq Z \leq 1,25) \\ &= 2(P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0)) \end{aligned}$$

3. E, ricorrendo alle tavole, otteniamo

$$2(P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0)) \simeq 2(0,894 - 0,5) = 0,788$$

Poi, in modo esattamente analogo, otteniamo

$$\mathbf{P(2,8 \leq D \leq 5,2)} \simeq 0,866$$

Pertanto la probabilità di poter mettere in vendita la barra senza modifiche è[27]

$$\begin{aligned}\mathbf{P(4,95 \leq L \leq 5,05 \text{ e } 2,8 \leq D \leq 5,2)} &= P(4,95 \leq L \leq 5,05) \cdot P(2,8 \leq D \leq 5,2) \\ &\simeq 0,788 \cdot 0,866 \simeq \boxed{0,68}\end{aligned}$$

**b)** Su 50.000 barre ci si aspetta di poterne vendere senza modifiche, circa

$$55.000 \cdot 0,68 = \boxed{37.400}$$

Infatti possiamo interpretare il valore di probabilità ottenuto nel punto a) come un valore a cui si approssima la frequenza relativa dell'evento in esame, su un "grande" numero di prove, con probabilità "grande" (forma intuitiva della Legge dei grandi numeri).

*Osservazione.* In alternativa, possiamo pensare di modellizzare la situazione mediante la distribuzione binomiale, caratterizzata da $n = 55.000$ prove, ciascuna con probabilità $p = 0,68$ di successo. Il valore atteso della corrispondente variabile aleatoria è proprio $np$ e, per l'interpretazione statistica del valore atteso, $np$ è "la" approssimazione richiesta.

[27] Assumiamo che la v.a. $L$ e la v.a. $D$ siano indipendenti. In tale ipotesi la legge della moltiplicazione afferma che l'intersezione dei due eventi in questione è il prodotto delle loro singole probabilità di realizzarsi.