7 Il TLC

A questo punto del percorso, disponiamo di vari strumenti relativi alla v.a. normale. Essi ci consentiranno di precisare la questione di approssimazione introdotta nel paragrafo 1.3. In tale sezione abbiamo visto che la *distribuzione binomiale* si può approssimare con una opportuna *distribuzione normale.* Ma

> *in che senso* la distribuzione binomiale *è approssimata* dalla distribuzione normale ?

Precisare tale approssimazione è un requisito indispensabile per effettuare concretamente l'approssimazione. In particolare relativamente al problema dei sondaggi che ci siamo posti all'inizio e che costituisce il filo conduttore.

7.1 Esplorazioni: i parametri -attività-

La nostra investigazione sull'approssimazione della binomiale inizia dall'esame dei valori da attribuire ai parametri della variabile aleatoria normale.
Precisamente, consideriamo una v.a. binomiale di parametri n e p fissati, dove n rappresenta il numero di prove e p la probabilità di successo nella prova.

Per quali valori dei parametri μ e σ^2 della v.a. normale, la densità approssima la distribuzione binomiale?

La forma dei due grafici suggerisce che le medie (normale e binomiale) debbano coincidere. Ossia ci aspettiamo valga

$$\boxed{\mu = np}$$

Resta dunque da individuare un valore per il parametro σ^2. È ciò che ci proponiamo di fare con l'attività seguente.

Nota. Per semplicità diciamo di confrontare il grafico della distribuzione binomiale con quello della densità normale. Ma distribuzione di probabilità e densità sono oggetti matematici diversi. Preciseremo più avanti in che senso vada considerato tale confronto.

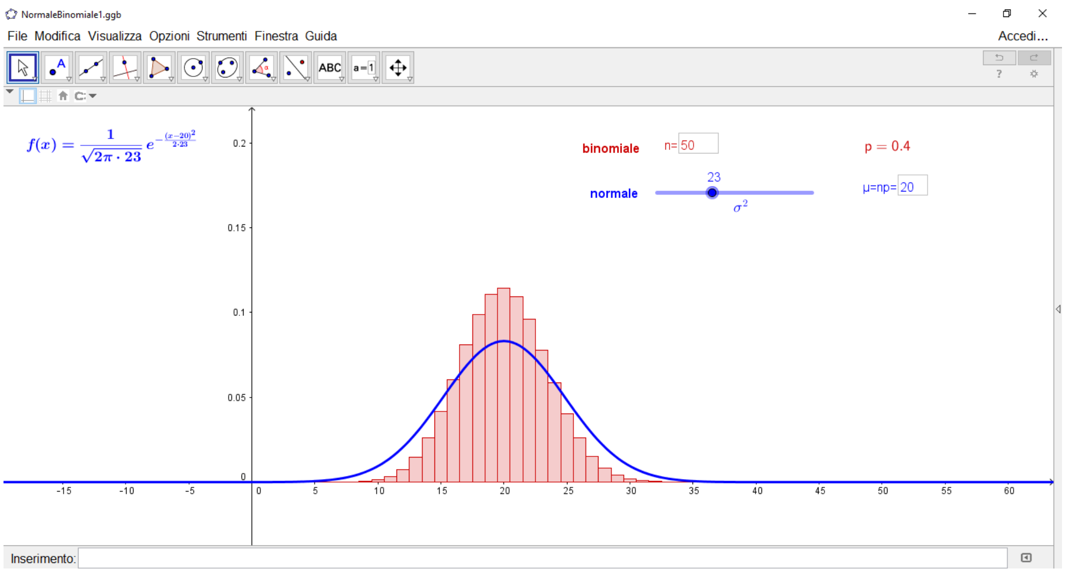
Utilizza il file Geogebra NormaleBinomiale1.ggb per rispondere alle sequenti questioni.

Considera le v.a. binomiali di media fissata $np = 20$ e per i seguenti valori di n: $n = 25$, $n = 50$, $n = 100$ e $n = 200$.
Considera poi la v.a. normale che ha media $\mu = np = 20$.

a) *In ciascuno dei casi indicati, determina un valore di σ^2 per il quale la curva normale sembra approssimare la distribuzione binomiale.*

b) *Quale relazione ti sembra possa esserci tra il valore trovato di σ^2 e quello dei parametri n, p della binomiale?*

Come si utilizza il file NormaleBinomiale1.ggb



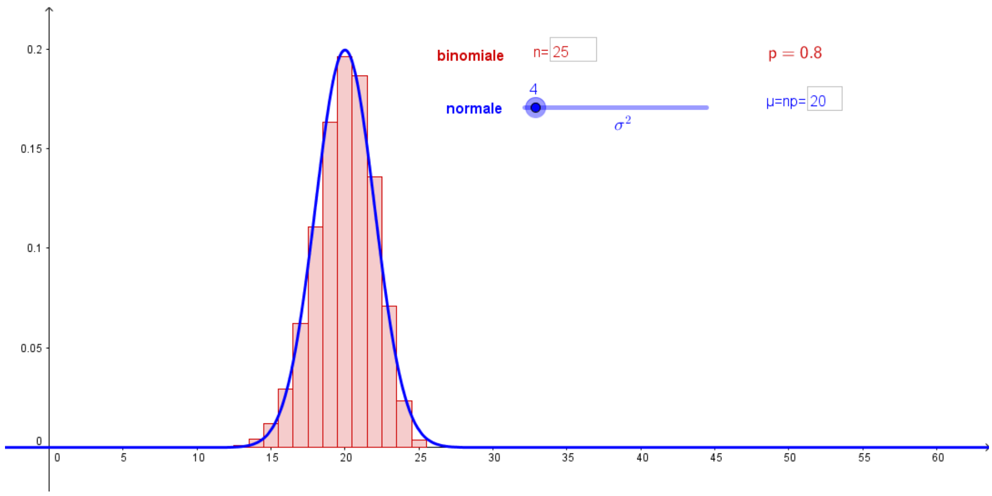
Il file dispone di:

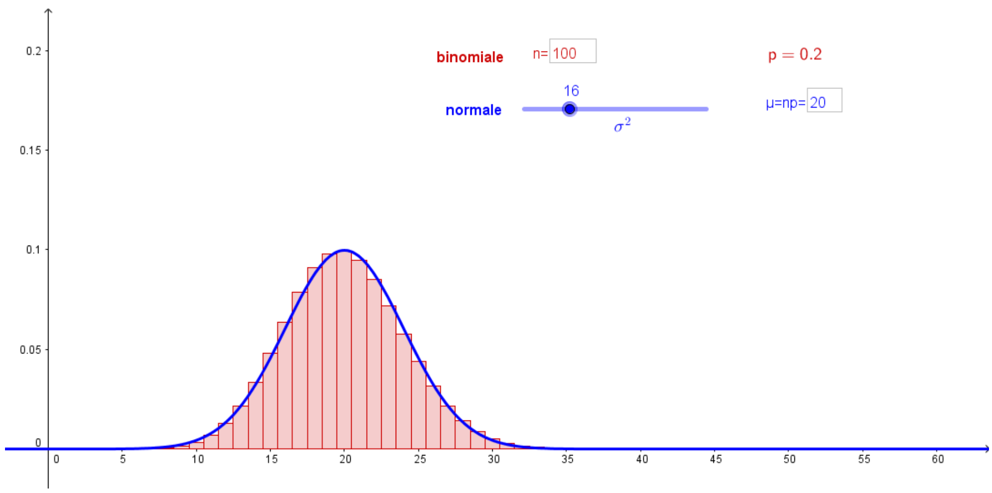
- una casella di inserimento per il parametro n della binomiale: a seconda del valore di n qui inserito, ottieni (automaticamente) il grafico della distribuzione binomiale;
- uno slider per il parametro σ^2 della normale: al variare di σ^2 (muovi il cursore) si ottengono i corrispondenti grafici della densità normale.

Risoluzione

a) Esaminando i grafici, si dovrebbe osservare che si ha una "buona" approssimazione intorno a:

- $\sigma^2 = 4$ quando $n = 25$
- $\sigma^2 = 12$ quando $n = 50$
- $\sigma^2 = 16$ quando $n = 100$
- $\sigma^2 = 18$ quando $n = 200$





b) Facendo un po' di conti, pare che il valore di σ^2, individuato nel punto a) nei vari casi, sia proprio uguale a $np(1-p)$. Ma quest'ultima espressione rappresenta la varianza della v.a. binomiale. Pertanto, almeno nei casi esaminati, sembra che si abbia una "buona" approssimazione quando le varianze delle due v.a. coincidono.

Conclusioni

Il risultato congetturato nell'attività precedente vale più in generale.

Se la varianza della v.a. normale è uguale a quella della v.a. binomiale (e le medie delle due v.a. coincidono), si ha una "buona" approssimazione della distribuzione binomiale. Ossia per

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

Attenzione però: come vedremo nella prossima attività, l'uguaglianza dei parametri della binomiale e della normale *non è sufficiente* per avere una "buona" approssimazione.