## 7.5 Applicazioni: dall'esame di Stato

Il TLC permette di risolvere in modo più agevole anche il quesito n.3 proposto nella simulazione della seconda prova[32] il 29 aprile 2016.

> Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza, il 15% della popolazione è a casa ammalato:
>
> **a)** qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per influenza?
>
> **b)** descrivi le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

**a)** *Decidiamo*[33] di modellizzare la situazione mediante la distribuzione binomiale. Consideriamo dunque la variabile aleatoria binomiale

$$S = \textit{numero di assenti per malattia}$$

I valori dei parametri della distribuzione sono:

$$\textit{numero di prove } \mathbf{n = 20}$$
$$\textit{probabilità che l'alunno si ammali } \mathbf{p = 0,15}.$$

Secondo il modello così costruito la probabilità dell'evento *"vi sono più di* 2 *assenti per malattia"* è[34]

$$\begin{aligned} P(S > 2) &= 1 - P(S \leq 2) \\ &= 1 - P(S = 2) - P(S = 1) - P(S = 0) \\ &= 1 - (190 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{18} + 20 \cdot 0,15 \cdot 0,85^{19} + 0,85^{20}) \\ &\simeq \boxed{0,5951} \end{aligned}$$

**b)** Proviamo prima a schematizzare la situazione mediante un modello binomiale analogo al precedente. In questo caso i valori dei parametri della distribuzione sono:

$$\textit{numero di prove } \mathbf{n = 500}$$
$$\textit{probabilità che l'alunno si ammali } \mathbf{p = 0,15}.$$

Secondo tale modello la probabilità dell'evento *"vi sono più di* 50 *ammalati"* è:

$$\begin{aligned} P(S > 50) &= 1 - P(S \leq 50) \\ &= 1 - P(S = 50) - P(S = 49) - ... - P(S = 0) \end{aligned}$$

Il calcolo è dunque articolato.

[32] Tale quesito era già stato assegnato nella sessione straordinaria italiana di settembre 2015 e nella sessione ordinaria 2015, scuole italiane all'estero, Americhe.

[33] In effetti di decisione si tratta: sulla base delle informazioni fornite nel testo del quesito si possono costruire diversi **modelli**; la distribuzione binomiale è solo **uno** dei modelli possibili.

[34] Per la prima uguaglianza siamo passati all'evento complementare.

Per semplificarlo ricorriamo al TLC[35] e approssimiamo la distribuzione binomiale con la <u>distribuzione normale</u> che ha la stessa media $\mu$ e la stessa varianza $\sigma^2$ della binomiale considerata. Ossia

$$\mu = np = 75 \quad \text{e} \quad \sigma^2 = np(1-p) = 63,75$$

Detta $X$ la variabile aleatoria normale *"numero di ammalati"*, vale

$$\mathbf{P(S > 50)} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{per il TLC}}}{\simeq} P(X > 50) \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{standardizzando } X}}{=} P\left(Z > \frac{50-75}{\sqrt{63,75}}\right) \simeq P(Z > -3,13)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{per simmetria}}}{=} P(Z < 3,13) \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{ricorrendo alle} \\ \textit{tavole}}}{\simeq} \boxed{0,9991}$$

Abbiamo così verificato che la probabilità che ci siano più di 50 influenzati su una scuola di 500 alunni è maggiore del 99%.

[35] In realtà si poteva applicare il TLC anche nella situazione descritta nel punto a) del quesito. In tal caso, però, i vantaggi computazionali che comporta tale approccio non sono così evidenti come nella situazione prospettata nel punto b).